* * *

Poderíamos também considerar um elemento que embora transmitindo uniformemente todas as frequências no intervalo [0, F] introduza um atrazo «τ».

O operador linear de transmissão relativo a este quadripolo será:

$$\vec{R}(\omega) = \varepsilon^{-j\omega\tau} \quad -W < \omega < W \tag{39}$$

$$\vec{R}(\omega) = 0 \qquad |\omega| > W$$

Obtém-se para este caso

$$r_u(t) = \frac{1}{\pi(t-\tau)} \text{ sen } W(t-\tau) \tag{40}$$

A série u_q reduz-se também a

$$u_o = 1$$

$$u_q = 0 \quad q \neq 0$$

desde que se arbitre $\tau_o = \tau$

8.1.4 — Elemento inverso

Elemento inverso dum dado sistema será, por definição, um quadripolo que associado em cadeia com o referido sistema conduza a um quadripolo equivalente que é o elemento unidade.

Dado um sistema caracterizado por $[u_n, \tau_1]$ definamos o elemento inverso por $[v_q, \tau_2]$.

Determinemos pelas formúlas (32) a série $[u_{ep}, \tau_o]$ equivalente ao conjunto.

Teremos imediatamente:

$$u_{ep} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{p-n}\, u_n \tag{41 a}$$

$$\tau_0 = \tau_1 + \tau_2 \tag{41 b}$$

Como u_{ep} se conhece, pois trata-se da série correspondente ao elemento unidade, (41 a) traduz um sistema de equações que nos permite determinar $v_q = v_{p-n}$. Embora se trate dum sistema com um número infinito de incógnitas pràticamente reduz-se a número finito.

As equações (41 a) e (41 b) reduzem-se a uma forma simples desde que se escolha $\tau_1 + \tau_2 = 0 = \tau_o$ pois que, nessas condições, é como se viu

$$u_{eo} = 1$$

$$u_{ep} = 0 \quad p \neq 0$$

Virá então:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{p-n}\, u_n = 1 \quad p = 0 \tag{42}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{p-n}\, u_n = 0 \quad p \neq 0$$

8.1.5 — Redução de um quadripolo qualquer a um quadripolo de característica A (ω) limitada a [0,F].

Embora se trabalhe com funções de espectro limitado acontece que por vezes os quadripolos não têm característica de amplitude limitadas a [0,F]. Nessas condições já a resposta r_u (t) não é função de espectro limitado, invalidando os resultados obtidos.

Podemos fàcilmente reduzir esse quadripolo a um quadripolo com A (ω) limitada a [0, F]. Bastará associa-lo em cadeia com o elemento unidade.

Dessa associação resultará, como é evidente, um quadripolo que no intervalo [0, F] tem um operador linear de transmissão que coincide com o do quadripolo primitivo e que se reduz a zero para as frequências superiores a F.

O facto resulta do elemento unidade funcionar como um filtro passa-baixo ou ainda da consideração de que o operador linear de transmissão do quadripolo equivalente à associação em cadeia é o producto dos operadores de cada um dos elementos.

O problema que se põe será pois de determinar a série u_q^F correspondente à resposta r_u (t) filtrada pelo elemento unidade.

Um processo será, evidentemente, determinar em vez da resposta

$$r_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \vec{R}(\omega)\, \varepsilon^{j\omega t}\, d\omega \tag{43}$$

a resposta filtrada r_u^F (t) que corresponde a integrar-se entre [— W, W]

$$r_u^F(t) = \int_{-W}^{W} \frac{1}{2\pi} \vec{R}(\omega)\, \varepsilon^{j\omega t}\, d\omega \tag{44}$$

Outro processo será determinar a resposta que o filtro passa-baixo [0, F] dá à função r_u (t).

Basta aplicar a expressão que nos dá s_2 (t) em função da resposta r_u (t) que o elemento unidade dá ao impulso unitário.

Usaremos a expressão considerada no capítulo 3.

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\tau')\, r_u(\tau')\, d\tau' \tag{45}$$

Simplesmente aqui, a integração deve estender-se de $-\infty$ a $+\infty$ pois que sendo o elemento unidade físicamente irrealizável, não satisfaz a

$$r_u(\tau') \equiv 0 \qquad \text{para } \tau' < 0$$

existindo r_u (τ') desde $-\infty$ a ∞.

Pelo resultado obtido em (35) r_u (t) é dado por

$$r_u(t) = \frac{1}{\pi t} \operatorname{sen} Wt = \frac{1}{\pi t} \operatorname{sen} 2\pi F t$$

Nessas condições a resposta filtrada será dada por

$$r_u^F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r_u(t-\tau') \frac{1}{\pi \tau'} \operatorname{sen} 2\pi F \tau\, d\tau' \tag{46}$$

* * *

Qualquer dos processos conduz à função r_u^F (t) que é uma função de espectro limitado [0, F] e à qual corresponde uma série u_q^F que permite aplicar ao quadripolo considerado a técnica das séries no tempo.

Indicaremos, quando tratarmos das aplicações, um modo prático e simples de obter u_q^F sem sem ter que se recorrer a (41) ou (46).

8.1.6 — Funções de espectro não limitado

Por vezes a função s_1 (t) não é de espectro limitado mas destina-se a ser transmitida por um canal cujo operador linear de transmissão é limitado a [0,F].

Nessas condições deve começar-se por reduzir s_1 (t) a uma função s_F (t) para o que basta filtrá-la através do elemento unidade.

Aplicando (46) obtém-se imediatamente a função s_1 (t) filtrada, s_1^F (t),

$$s_1^F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\tau') \frac{1}{\pi\tau} \operatorname{sen} 2\pi F \tau' \, d\tau' \tag{47}$$

Como o canal está limitado ao intervalo [0, F] a resposta que se obtem é a mesma quer se considere s_1 (t) ou s_1^F (t).

À função de s_1^F (t) pode, agora, aplicar-se a técnica das séries no tempo.

10 — RESUMO DE RESULTADOS. EXPRESSÃO SIMBÓLICA DAS SÉRIES NO TEMPO

Os conceitos introduzidos e resultados obtidos constituem os elementos fundamentais da teoria das séries no tempo relativa à sua aplicação à determinação da resposta de sistemas lineares de transmissão.

A reunião dos referidos elementos constitui, pois, a referida teoria. Antes de prosseguir entrando no domínio das aplicações faremos um resumo dos resultados obtidos.

10.1 — Condições de aplicação

A teoria estabelecida apenas se aplica a funções, s_F (t) de espectro limitado ao intervalo [0, F] e a quadripolos cujo operador linear de transmissão seja limitado ao mesmo intervalo.

10.2 — Séries no Tempo. Definição

São as séries cronológicas cujos termos são os valores da função s_F (t) tomados nos instantes «t_n». Isto é

$$\text{Série no tempo} \equiv s_F(t_n)$$

$$t_n = nTr + \tau \qquad Tr = \frac{1}{2F}$$

τ — denomina-se tempo de referência.

10.3 — Séries normalizadas

São as séries no tempo em que os termos são os elementos s_F (t_n) divididos por 2 F

$$s_n = \frac{s_F(t_n)}{2F}$$

10.4 — Propriedades fundamentais das funções s_F (t)

Uma função de espectro limitado, s_F (t), e o seu espectro, $\vec{E}$ [s_F (t)], exprimem-se completamente em função das correspondente séries, s_F (t_n) ou s_n

Propriedade I $$s_F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_F(t_n) \frac{\operatorname{sen} 2\pi F(t-t_n)}{2\pi F(t-t_n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \frac{\operatorname{sen} 2\pi F(t-t_n)}{\pi(t-t_n)}$$

Propriedade II $$\vec{E}[s_F(t)] = \frac{1}{2W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_F(t_n)\, \varepsilon^{-j\omega t_n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n\, \varepsilon^{-j\omega t_n}$$

10.5 — Princípio fundamental

Um quadripolo em que o operador linear de tronsmissão esteja limitado a [0, F], apresenta uma resposta r_u (t) ao impulso unitário s_u (t) que é uma função de espectro limitado [0, F). O quadripolo fica completamente definido pela série correspondente a r_u (t), designando-se por u_n a série normalizada

$$u_n = \frac{r_u (t_n)}{2 F}$$

* * *

A resposta s_2 (t) a uma função de entrada s_1 (t) obtém-se então a partir das séries correspondentes a s_1 (t) e r_u (t).

A série normalizada s_{2p} correspondente a s_2 (t) obtém-se a partir de (31 a) e (31 b)

$$s_{2p} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{p-n} s_{1n} \qquad (31\,a)$$

$$\tau_2 = \tau_0 + \tau_1 \qquad (31\,b)$$

Designando simbòlicamente

a série s_{1n} por S_1

» » u_q » U

» » s_{2p} » S_2

e convencionando definir (31 a) e (31 b) como o produto de U por S_1 podemos escrever simbòlicamente

$$S_2 = U \,.\, S_1 \qquad (48)$$

* * *

Dados dois quadripolos de séries u_{1n} e u_{2q} referentes às respostas r_{u1} (t) e r_{u2} (t) podemos escrever, dentro da mesma simbologia, para a série equivalente U

$$U = U_1 \,.\, U_2 \qquad (49)$$

A série equivalente é o producto das séries de cada elemento, dado que u_p se obtém de u_{1n} e u_{2q} por expressões (32) formalmente iguais a (31).

* * *

Estas relações traduzem o princípio fundamental que preside à aplicação das séries no tempo ao problema proposto, determinação da resposta de sistemas lineares de transmissão.

11 — TEORIA ELEMENTAR DAS SÉRIES NO TEMPO

Podemos, agora, com os elementos de que dispomos reduzir a teoria feita a um conjunto de propriedades que convém reunir de modo lógico e sucinto.

Teremos assim:

(11.1) Notações

S_1 expressão simbólica de s_{1n}, série normalizada de s_1 (t)
S_2 expressão simbólica de s_{2p}, série normalizada de s_2 (t)
U expressão simbólica de u_q, série normalizada de r_u (t)

1 expressão simbólica da série normalizada da resposta $r_u(t)$ do elemento unidade.

U^{-1} expressão simbólica da série normalizada da resposta $r_u(t)$ do elemento inverso. A série v_q correspondente ao elemento inverso determina-se a partir de (41)

S_1^F expressão simbólica da série normalizada correspondente à função $s_1^F(t)$ resultado de filtrar pelo elemento unidade a função $s_1(t)$ de espectro não limitado

U^F expressão simbólica da série normalizada correspondente à resposta $r_u^F(t)$ resultante de filtrar pelo elemento unidade a resposta $r_u(t)$ dum quadripolo de operador não limitado ao impulso unitário $i_u(t)$.

11.2 — Propriedades fundamentais

Definido o produto de séries pelas expressões (31), teremos fundamentalmente as seguintes propriedades das séries no tempo cujo conjunto constitui a teoria elementar das mesmas:

I — Lei de transmissão de sinais

$$S_2 = U \,.\, S_1$$

II — Lei de associação de quadripolos em cadeia

$$U = U_1 \,.\, U_2$$

III — Elemento unidade 1

$$U \,.\, 1 = U$$

IV — Elemento inverso U^{-1}

$$U \,.\, U^{-1} = 1$$

V — Transmissão de funções de espectro não limitado através de canais limitado a [0, F]. Usa-se a série S_1^F

VI — Transmissão de funções de espectro limitado através dum canal não limitado a [0, F]. Usa-se a série U^F

* * *

Damos, aqui, por estabelecida a teoria das séries no tempo relativa à aplicação que encontram na determinação da resposta de sistemas lineares de transmissão.

Podem-se ainda estabelecer outras propriedades e resultados que se deduzem lògicamente dos princípios estabelecidos pelo que incluiremos estes últimos no domínio das aplicações.

(Continuação)

C. D. U. 624.041.2

O MÉTODO DE RELAXAÇÃO

SUA APLICAÇÃO AO CÁLCULO DE ESTRUTURAS RECTICULARES CONTÍNUAS PLANAS CONTENDO PEÇAS CURVAS

(Conclusão)

PELO ENG.º CIVIL ANTÓNIO PACHECO CORREIA DE CINTRA

II APLICAÇÃO

Forma, dimensões e solicitação

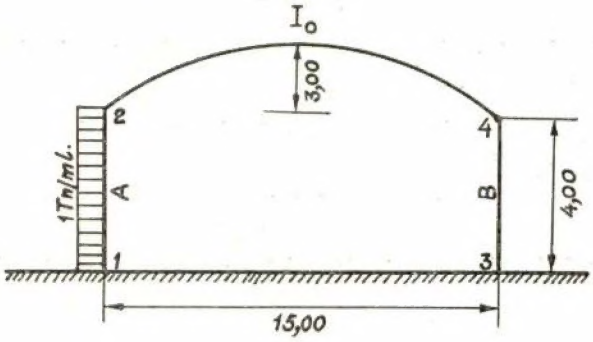


Fig. 16

Elementos		Secção	I	E	l
Pilares	Arco	(m²)	(m⁴)	(Tn/m²)	(m)
$\overline{1,2}$	–	$0,30 \times 0,30$	$6,7 \times 10^{-4}$	21×10^5	4,00
$\overline{3,4}$	–	$0,30 \times 0,30$	$6,7 \times 10^{-4}$	21×10^5	4,00
–	$\overset{\frown}{2,4}$	$0,30 \times 0,30$	$6,7 \times 10^{-4}$	21×10^5	15,00

Condições de apoio

Encastramento perfeito de ambos os montantes. O montante B sofre um assentamento desigual de 0,005 m.

O MATERIAL DE ILUMINAÇÃO FLUORESCENTE ACEC

CIENTÌFICAMENTE ESTUDADO E VERIFICADO, OFERECE AS MAIS COMPLETAS GARANTIAS DE ALTA

QUALIDADE

LÂMPADAS
BALASTROS
ARRANCADORES
ARMADURAS

UMA DAS FASES DE FABRICAÇÃO DE LÂMPADAS FLUORESCENTES ACEC

ACEC - ATELIERS DE CONSTRUCTIONS ÉLECTRIQUES DE CHARLEROI

REPRESENTANTES GERAIS

INEL - INDÚSTRIAS ELÉCTRICAS ASSOCIADAS

SEDE EM LISBOA: RUA RODRIGO DA FONSECA, 76, 4.º

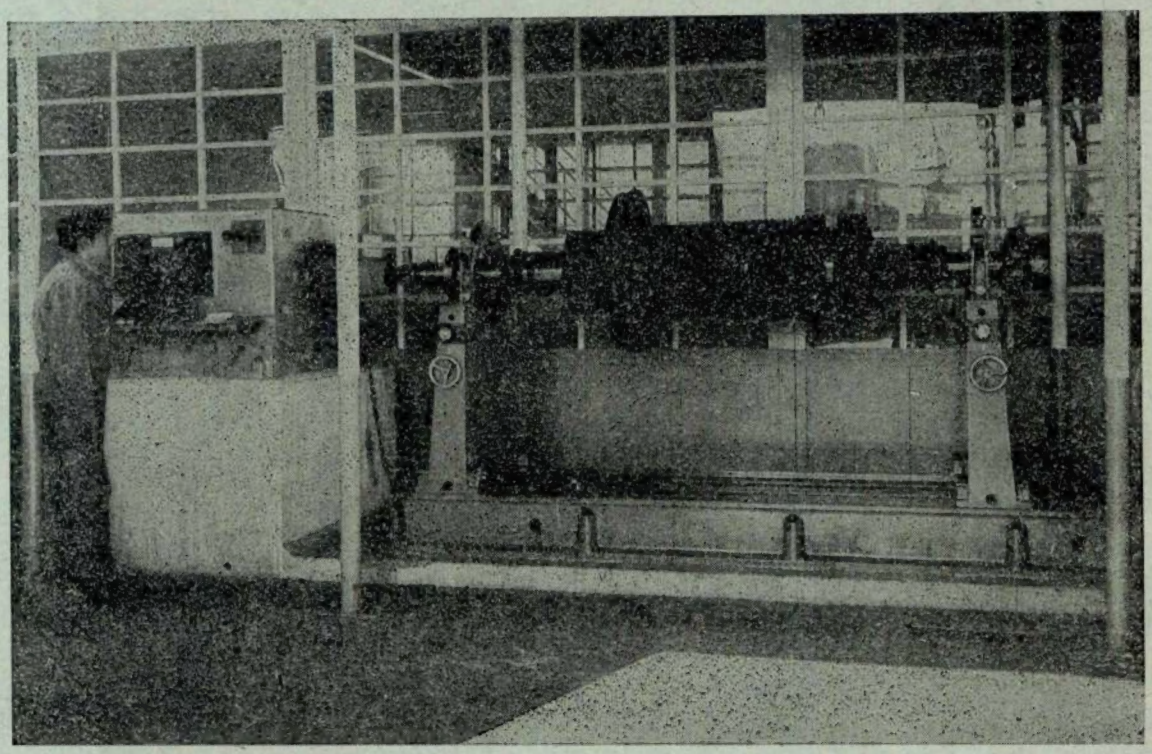
DELEGAÇÃO NO PORTO: RUA DE SANTA CATARINA, 470

TELEF. 28841, 28842 e 28843 — TELEG.: INELAPO-PORTO

ACEC CHARLEROI

A COMPANHIA UNIÃO FABRIL

põe à disposição dos seus clientes no Estaleiro Naval:



— Uma oficina de Ensaios e Reparação Diesel

— Uma máquina electrodinâmica de equilibragem para rotores de 30 a 3000 Kgs. — 2 M. de diâmetro máximo — 3,420 m. entre apoios.

ROCHA DO CONDE DE ÓBIDOS

LISBOA

Telef. 66 21 48

Coeficientes de influência

Elem.	E (Tn/m²)	I (m⁴)	l (m)	$\lvert\widehat{xx}\rvert$	$\lvert\widehat{yy}\rvert$	$\lvert\widehat{rx}\rvert$ $\lvert\widehat{xr}\rvert$	$\lvert\widehat{ry}\rvert$ $\lvert\widehat{yr}\rvert$	$\lvert\widehat{rr}\rvert$ m	$\lvert\widehat{rr}\rvert$ f
$\overline{1,2}$	21×10^5	$6,7 \times 10^{-4}$	4,00	263,8	–	527,6	–	1.407,0	703 5
$\overline{3,4}$	21×10^5	$6,7 \times 10^{-4}$	4 00	263,8	–	527,6	–	1.407,0	703 5
$\widehat{2,4}$	21×10^5	$6,7 \times 10^{-4}$	15,00	117,2	5,0	234,5	37,5	844,2	281,4

Factores de operação

N.º	Tipo	1 N_2	2 N_4	3 X_2	4 X_4	5 N_1	6 N_3	7 X_1	8 X_3	9 Y_A	10 Y_B
1	$V_B = 1$	37,5	37,5	0	0	0	0	0	0	5,0	– 5 0
2	$r_2 = 1$	– 2.251,2	281,4	293,1	234 5	– 703,5	0	– 527,6	0	– 37 5	37 0
3	$r_4 = 1$	281,4	– 2.251,2	234,5	293,1	0	– 703,5	0	– 527,6	– 37,5	37,0
4	$U_2 = 1$	293,1	234,5	– 381 0	117,2	527,6	0	263,8	0	0	0
5	$U_4 = 1$	234,5	293,1	117,2	– 381,0	0	527,6	0	263 8	0	0
6	$-r_2 = r_4 = 1$	2.532 6	– 2.532,6	– 58 6	58,6	703,5	– 703,5	527 6	– 527,6	0	0
7	$U_2 = U_4 = 1$	527,6	527 6	– 263 8	– 263,8	527,6	527 6	263 8	263,8	0	0
8	$r_2 = r_4 = 1$	– 1.969,8	– 1.669,8	527,6	527,6	– 703,5	– 703,5	– 527,6	– 527,6	– 75 0	75,0

Verificação dos coeficientes de influência e factores de operação

(1) — : $37,5 + 37,5 - 15 \times 5,0 = 0$

(2) — : $-2.251,2 + 281,4 - 703,5 + 37,5 \times 15 + 527,6 \times 4 = 0$

(3) — : $281,4 - 2.251,2 - 703,5 + 37,5 \times 15 + 527,6 \times 4 = 0$

(4) — : $293,1 + 234,5 + 527,6 - 263,8 \times 4 = 0$

(5) — : $234,5 + 293,1 + 527,6 - 263,8 \times 4 = 0$

Reacções nos extremos dos elementos considerados perfeitamente encastrados

$$\text{Montante } \overline{1,2} \begin{cases} M_1 = M_2 = \dfrac{q\,l^2}{12} = \dfrac{1 \times 16}{12} = 1{,}333 \text{ Tm.} \\[2ex] H_1 = H_2 = \dfrac{q\,l^2}{2} = \dfrac{1 \times 4}{2} = 2 \text{ Tn.} \end{cases}$$

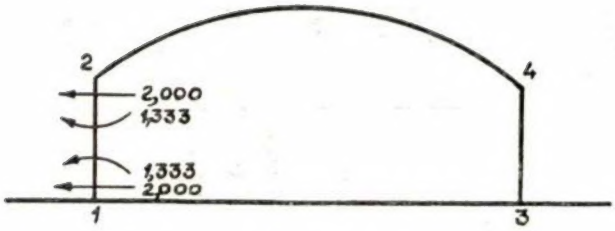


Fig. 17

Acções desiquilibradas dos nós

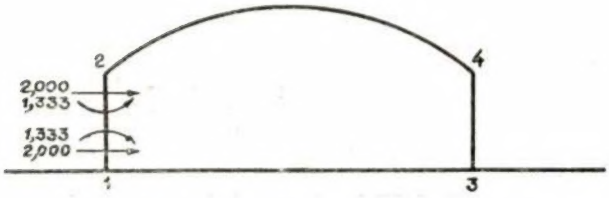


Fig. 18

Relaxação

Tipo	Valor da relaxação	1 N_2	2 N_4	3 X_2	4 X_1
		— 1,333	0,000	2,000	0,000
1	0 00500	0,187	0,187	0,000	0,000
		— 1,146	0,187	2 000	0,000
7	0,00758	3,999	3 999	— 2 000	— 2,000
		2,853	4,186	0,000	— 2,000
6	0 00165	4,179	— 4 179	— 0,097	0,097
		7,032	0 007	— 0,097	— 1,903
2	0,00312	— 7,024	0,878	0,914	0,732
		0,008	0,885	0,817	— 1,171
5	— 0,00307	— 0 720	— 0,900	— 0,360	1,170
		— 0,712	— 0,015	— 0,457	— 0,001
2	— 0 00031	0,698	— 0,087	— 0 091	— 0,073
		— 0,014	— 0,102	0,366	— 0,074
3	— 0 00005	— 0 014	0,113	— 0,012	— 0,015
		— 0,028	0,011	0,354	— 0,099
4	0,00091	0,267	0 213	— 0 347	0,107
		0,239	0,224	0,007	0,008
8	0,00012	— 0 236	— 0 236	0,063	0,063
		0,003	— 0,012	0,070	0,071
7	0,00026	0,137	0,137	— 0 069	— 0,069
		0,140	0,125	0,001	0,002
3	0 00007	0,020	— 0,158	0,016	0,020
		0,160	— 0,033	0 017	0,022
2	0,00007	— 0,158	0,020	0 020	0 016
		0,009	— 0,013	0,037	0,038
3	0,00001	0,003	— 0,025	0,002	0,003
		0,005	— 0,038	0,039	0,041
4	0 00010	0,029	0,023	— 0,038	0,012
		0 034	— 0,015	0 001	0,053
5	0,00013	0,030	0,038	0 015	— 0 050
		0,064	0,023	0,016	0,003
4	0,00004	0,012	0,009	— 0,015	0,005
		0,076	0,032	0,001	0,008
2	0,00003	— 0,067	0,008	0,009	0,007
		0,009	0,040	0 010	0,015
3	0,00003	0,008	— 0 067	0 007	0,009
		0,017	— 0,027	0,017	0,024
7	0,00007	0 037	0 037	— 0,018	— 0 018
		0,054	0,010	— 0,001	0 006
6	— 0,00002	— 0 051	0,051	0 001	— 0,001
		0,003	0,061	0,000	0,005
3	0 00004	0 011	— 0 090	0 009	0,012
		0,014	— 0 029	0,009	0,027

Verificação da relaxação

Tipo	Valor da relaxação	1 N_2	2 N_1	3 X_2	4 X_1
		— 1,333	0,000	2,000	0,000
1	0,00500	0,187	0,187	0,000	0,000
2	0,00291	— 6,551	0,819	0,852	0,682
3	0,00010	0,028	— 0,227	0,022	0,029
4	0,00105	0,308	0,245	— 0,400	0,124
5	— 0,00294	— 0,690	— 0,862	— 0,345	1,120
6	0,00163	4,128	— 4,128	— 0,096	0,096
7	0,00791	4,173	4,173	— 2,087	— 2,087
8	0,00012	— 0,236	— 0,236	0,063	0,063
		0,014	— 0,029	0,009	0,027

Valores totais das rotações e translacções

$r_2 = 0{,}00140$ rad.

$r_4 = 0{,}00185$ rad.

$V_B = 0{,}00500$ m

$U_2 = 0{,}00895$ m

$U_1 = 0{,}00496$ m

Verificação das reacções de apoio

Dos valores obtidos na fig. 19 resulta

$$\text{Equilíbrio de forças} \begin{cases} 0{,}096 - 0{,}096 = 0 \\ 4 - 3{,}624 - 0{,}335 = 0{,}041 \end{cases}$$

$$\text{Equilíbrio de momentos} \left\{ 4 \times 2 - 0{,}096 \times 15 - 5{,}075 - 1{,}321 = 0{,}064 \right.$$

Deverá ainda proceder-se à verificação dos equilíbrios de forças e momentos nos nós.

Determinação dos momentos e esforços nos extremos das peças

Elem. $\overline{A,B}$	$\lvert\widehat{rx}\rvert_{AB}$ (1)	$\lvert\widehat{xx}\rvert_{AB}$ (2)	$(U_B - U_A)$ ou Δl (3)	$\lvert\widehat{ry}\rvert_{AB}$ (4)	$\lvert\widehat{yy}\rvert_{AB}$ (5)	$(V_B - V_A)$ (6)	$\lvert\widehat{xr}\rvert_{AB}$ (7)	$\lvert\widehat{yr}\rvert_{AB}$ (8)	${}_m\lvert\widehat{rr}\rvert_{AB}$ (9)	${}_f\lvert\widehat{rr}\rvert_{AB}$ (10)	r_A (11)	r_B (12)	(1.3) (13)	(2.3) (14)	(4.6) (15)	(5.6) (16)	(7.11) (17)	(7.12) (18)	(8.11) (19)	(8.12) (20)	(9.11) (21)	(9.12) (22)	(10.11) (23)	(10.12) (24)
$\overline{1,2}$	527,6	263,8	0,00896	—	—	0	527,6	—	1.407,0	703,5	0	0,00140	4,727	2,363	—	—	0	0,739	—	—	0	1,970	0	0,985
$\overline{3,4}$	527,6	263,8	0,00497	—	—	0	527,6	—	1.407,0	703,5	0	0,00185	2,622	1,311	—	—	0	0,976	—	—	0	2,603	0	1,301
$\widehat{2,4}$	234,5	117,2	− 0,00399	37,5	5,0	0,0050	234,5	37,5	844,2	281,4	0,00140	0,00185	− 0,935	− 0,467	0,181	0,025	0,328	0,434	0,052	0,069	1,182	1,562	1,394	0,520

Elem.	Momentos				Esforços nos apoios		
	Pilares		Arco		Pilares	Arco	
$\overline{A,B}$	M_A $-13+21+24$	M_B $-13+22+23$	M_A $-13-15+21-24$	M_B $13-15+22-23$	X_A $-14+17+18$	X_A $-14+17-18$	Y_A $-16+19+20$
$\overline{1,2}$	− 3,742	−2,757	—	—	− 1,624	—	—
$\overline{3,4}$	−1,321	−0,019	—	—	− 0,335	—	—
$\widehat{2,4}$	—	—	1,410	0,046	—	0,361	0,091

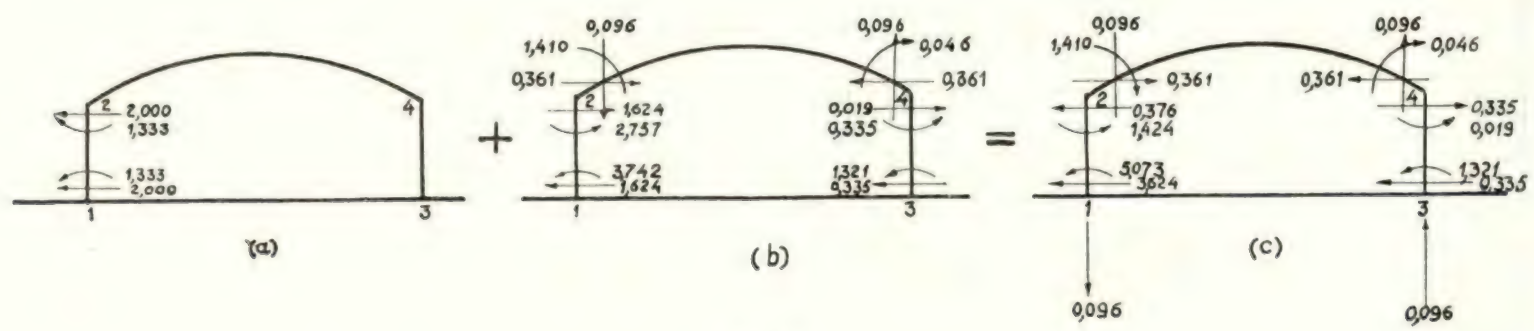


Fig. 19

III APLICAÇÃO

Forma, dimensões e solicitação

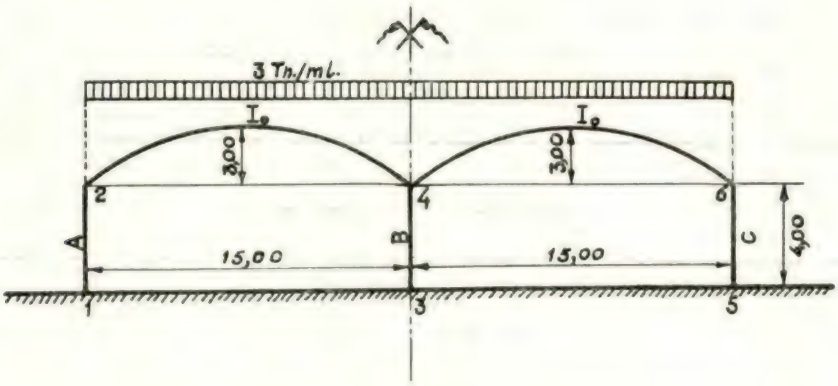


Fig. 20

Dada a simetria da solicitação e da estrutura, considerar-se-á apenas metade desta no estudo que se segue.

Elementos			Secção	I	E	l
pil.	arc.	tir.	(m^2)	(m^4)	(Tn/m^2)	(m)
$\overline{1,2}$	—	—	$0,30 \times 0,30$	$6,7 \times 10^{-4}$	21×10^5	4,00
$\overline{3,4}$	—	—	$0,30 \times 0,30$	$6,7 \times 10^{-4}$	21×10^5	4,00
$\overline{5\,6}$	—	—	$0,30 \times 0,30$	$6,7 \times 10^{-4}$	21×10^5	4,00
—	$\overline{2,4}$	—	$0,30 \times 0,30$	$6,7 \times 10^{-4}$	21×10^5	15,00
—	$\overline{4\,6}$	—	$0,30 \times 0,30$	$6,7 \times 10^{-4}$	21×10^5	15,00
—	—	$\overline{2,4}$	0,0002	—	21×10^5	15,00
—	—	$\overline{4,6}$	0,0002	—	21×10^6	15,00

Condições de apoio

Não há qualquer assentamento dos apoios. O seu encastramento é elástico. Recorda-se, que por encastramento elástico se entende o encastramento, em que as rotações e os momentos reacção que se desenvolvem são proporcionais. Assim, se conhecermos o valor do momento que se desenvolve M_r, para uma rotação unitária, teremos possibilidade de conhecer o momento desenvolvido para qualquer rotação diferente da unidade (1). Seja o nosso caso:

$$M_r = 250 \text{ Tm}$$

Valor de R_1 para os tirantes

Será como na aplicação I:

$$R_1 = 280 \text{ Tn}$$

(1) — Sobre este assunto consulte-se «Cálculo de Estruturas Atendendo ao Grau de Encastramento das Fundações», pelo Eng.º Brazão Farinha. «Boletim da Ordem dos Engenheiros» Vol. V, n.º 8.

Coeficientes de influência

Elem. $\overline{A,B}$	E (Tn/m²)	I (m⁴)	l (m)	$\lvert\widehat{xx}\rvert$	$\lvert\widehat{yy}\rvert$	$\lvert\widehat{rx}\rvert$ $\lvert\widehat{xr}\rvert$	$\lvert\widehat{ry}\rvert$ $\lvert\widehat{yr}\rvert$	$\lvert rr\rvert$ m	$\lvert rr\rvert$ f
$\overline{1,2}$	21×10^5	$6{,}7 \times 10^{-4}$	4,00	263,8	—	527,6	—	—	1.407,0
$\overline{2,4}$	21×10^5	$6{,}7 \times 10^{-4}$	15,00	117,2	5,0	234,5	37,5	844,2	281,4

Factores de operação

N.º	Tipo	1 N_1	2 N_2	3 X_2	4 X_1	5 N_4	6 X_4	7 Y_A	8 Y_B
1	$r_1 = 1$	— 1.657,2	— 703,5	527,6	— 527,6	0,0	0,0	0,0	0,0
2	$r_2 = 2$	— 703,5	— 2.251,2	293,1	— 527,6	281,4	234,5	— 37,5	37,5
3	$U_2 = 1$	527,6	293,1	— 661,0	263,8	234,5	397,1	0,0	0,0

Verificação dos coeficientes de influência e factores de operação

(1) — : — 1.651,0 — 703,5 + 527,6 × 4 — 250,0 — 0

(2) — : — 703,5 — 2.251,2 + 281,4 + 4 × 227,6 + 37,5 × 15 = 0

(3) — : — 527,6 + 293,1 + 234,5 — 263,8 × 4 = 0

Reacções nos extremos dos elementos considerados perfeitamente encastrados

Arcos $\widehat{2,4}$ e $\widehat{4,6}$

$$\begin{cases} M_e = M_d = 0 \\ H_e = -H_d = \dfrac{q\,l^2}{8f} = \dfrac{3 \times 225}{8 \times 3} = 28{,}125 \text{ Tnm.} \\ V_e = V_d = \dfrac{q\,l}{2} = \dfrac{3 \times 15}{2} = 22{,}500 \text{ Tn.} \end{cases}$$

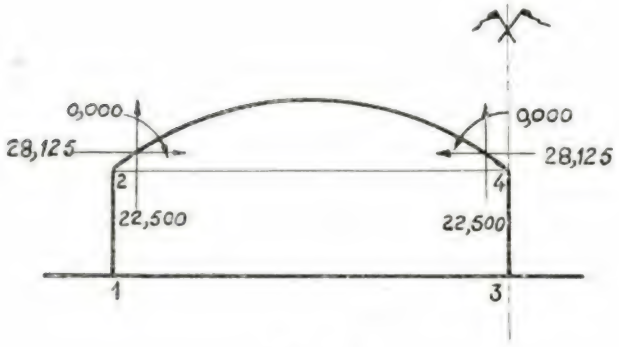


Fig. 21

Acções desequilibradas nos nós

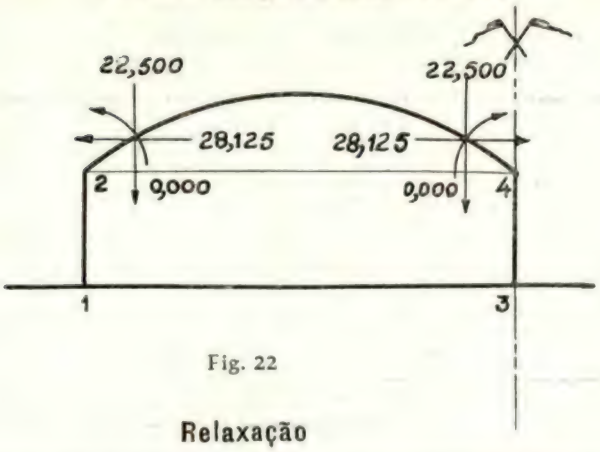


Fig. 22

Relaxação

Tipo	Valor da relaxação	1 N_1	2 N_2	3 X_2
		0,000	0,000	— 28,125
3	— 0.04254	— 22 444	— 12,468	— 28,119
		— 22,444	— 12,468	— 0,006
1	— 0.01354	22,435	9,525	— 7,144
		— 0,008	— 2,943	— 7,150
2	— 0,00130	0 914	2,927	— 0.381
		0,906	— 0,016	— 7.531
3	— 0,01139	— 6,009	— 3.338	7,529
		— 5,103	— 3.354	— 0,002
1	— 0,00307	5,087	2,160	— 1,620
		— 0,016	— 1,194	— 1,622
2	— 0,00053	0 373	1,193	— 0.155
		0,357	— 0,001	— 1,777
3	— 0,00268	— 1,414	— 0,785	1,771
		— 1,057	— 0,786	— 0,006
1	— 0,00063	1,044	0,443	— 0,332
		— 0,013	— 0,343	— 0 338
2	— 0,00015	0,105	0 338	— 0 044
		0,092	— 0,005	— 0,382
3	— 0,00058	— 0,306	— 0,170	0,383
		— 0,214	— 0,175	0,001
1	— 0,00012	0,199	0 084	— 0,063
		— 0,015	— 0,091	— 0,669
2	— 0,00004	0,028	0,090	— 0,012
		0,013	— 0,001	— 0,074
3	— 0,00011	— 0,058	— 0,032	0,073
		— 0,045	— 0,033	— 0,001
1	— 0,00002	0 033	0,014	— 0 010
		— 0,012	— 0,019	— 0,011
2	— 0,000008	0,006	0 018	— 0 002
		— 0,006	— 0,001	— 0,013
3	— 0,000007	— 0 003	— 0,002	0 005
		— 0 009	— 0,003	— 0,008

Verificação da relaxação

Tipo	Valor da relaxação	1 N_1	2 N_2	3 X_2
		0,000	0,000	— 28,125
1	— 0,01738	28,799	12 226	— 9,169
2	— 0 002028	1,426	4 566	— 0 594
3	— 0,057307	— 30 234	— 16 795	37,880
		— 0,009	— 0,003	— 0,008

Valores totais das rotações e translacções

$$r_1 = -0{,}01738 \text{ rad.}$$
$$r_2 = -0{,}002028 \text{ rad.}$$
$$U_2 = -0{,}057307 \text{ m}$$

Exforço no tirante

$$P = \frac{S \Delta l E_a}{1} = \frac{0{,}0002 \times 0{,}05730 \times 21 \times 10^6}{15} = 16{,}04 \text{ Tn}$$

Verificação das reacções de apoio

Dos valores obtidos na fig. 23 resulta

$$\text{Equilíbrio de forças} \begin{cases} 4{,}877 - 4{,}877 = 0 \\ 3 \times 30 - 22'576 - 44{,}858 \quad 22{,}576 = 0 \end{cases}$$

Equilíbrio de moment. $-90 \times 15 + 4{,}354 - 4{,}354 + 22{,}576 \times 30 + 44{,}858 \times 15 = 0{,}027$

Deverá ainda fazer-se como já temos referido, a verificação do equilíbrio de forças e momentos nos nós.

HEENAN & FROUDE LTD.

WORCESTER
ENGLAND

VELOCIDADE VARIÁVEL COM

Motor «shunt» de corrente contínua

Unidade electrónica de rectificação

Regulador de velocidade

Representada por:

THE ENGINEERING COMPANY OF PORTUGAL, LDA.

Rua dos Remolares, 12-1.º — LISBOA

UNILENE

Características:

Leveza; grande resistência ao choque, esmagamento e abrasão; boa flexibilidade; grande estabilidade dimensional; perdas de carga mínimas; imunidade à incrustação, insensibilidade às baixas temperaturas; resistência aos ácidos minerais, alcalis e soluções salinas, inatacabilidade por fungos ou roedores. Não tóxico.

Restrições:

A temperatura máxima de serviço contínuo é de 50° C.

Aplicações:

Construção Civil, Indústria Química, Condutas desmontáveis ou fixas para cerveja, agricultura, vinicultura, sulfato para as vinhas, estábulos, nitreiras, centrais leiteiras, sumos de frutos, águas ácidas, água salgada ou calcárea, condutas de água e ar nas minas, pedreiras, etc.

UNILENE

SOCIEDADE FABRIL DE MATÉRIAS PLÁSTICAS

PORTO
RUA DO HEROÍSMO, 291
Tele { gramas UNISOTRA
fone (prov.) 5 2102

LISBOA
RUA DA EMENDA, 19
Tele { gramas UNISOTRA
fone 2 0448 - 36 7488 - 36 7489

Determinação dos momentos e esforços nos extremos das peças

Elem. $\overline{A,B}$	$\lvert\widehat{rx}\rvert_{AB}$ (1)	$\lvert\widehat{xx}\rvert_{AB}$ (2)	$(U_B - U_A)$ ou Δl (3)	$\lvert\widehat{ry}\rvert_{AB}$ (4)	$\lvert\widehat{yy}\rvert_{AB}$ (5)	$(V_B - V_A)$ (6)	$\lvert\widehat{xr}\rvert_{AB}$ (7)	$\lvert\widehat{yr}\rvert_{AB}$ (8)	$m\lvert\widehat{rr}\rvert_{AB}$ (9)	$f\lvert\widehat{rr}\rvert_{AB}$ (10)	r_A (12)	r_B (12)	(1.3) (13)	(2.3) (14)	(4.6) (15)	(5.6) (16)	(7.11) (17)	(7.12) (18)	(8.11) (19)	(8.12) (20)	(9.11) (21)	(9.12) (22)	(10.11) (23)	(10.12) (24)
$\overline{1,2}$	527,6	273,1	−0,057307	—	—	0	527,6	—	1.407,0	703,5	−0,01735	−0,002028	−30,235	−15,117	—	—	−9,170	−1,070	— —	—	−24,454	−2,853	−12,227	−1,427
$\widehat{2,4}$	234,5	117,2	0,057307	37,5	5,0	0	234,5	37,5	844,2	281,4	−0,02028	0	13,438	6,716	0	0	−0,475	0	−0,076	0	−1,712	0	−0,571	0

Alem.	Momentos				Esforços nos apoios		
	Pilares		Arco		Pilar	Arco	
$\overline{A,B}$	M_A $-13+21+24$	M_B $-13+22+23$	M_A $-13-15+21-24$	M_B $13-15+22-23$	X_A $-14+17+18$	X_A $-14+17-18$	Y_A $-16+19+20$
$\overline{1,2}$	4,354	15,155	—	—	4,877	—	—
$\widehat{2,4}$	—	—	−15,150	14,008	—	−7,191	−0,076

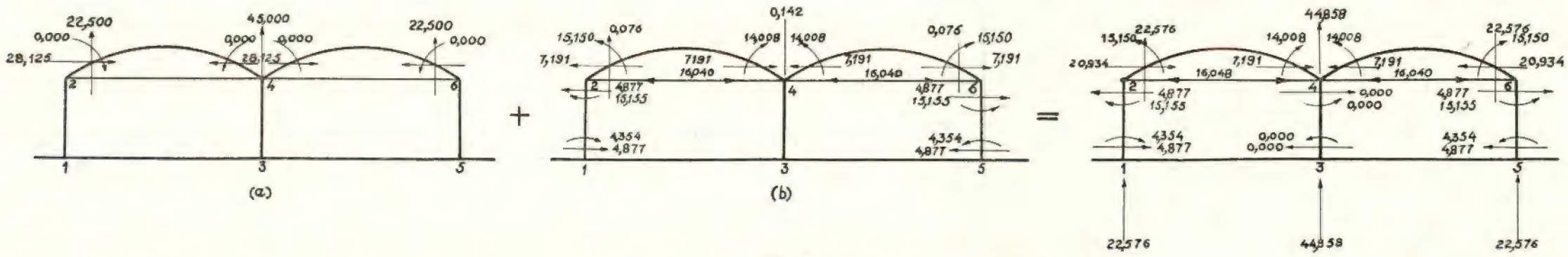


Fig. 23

IV APLICAÇÃO

Forma dimensões e solicitação

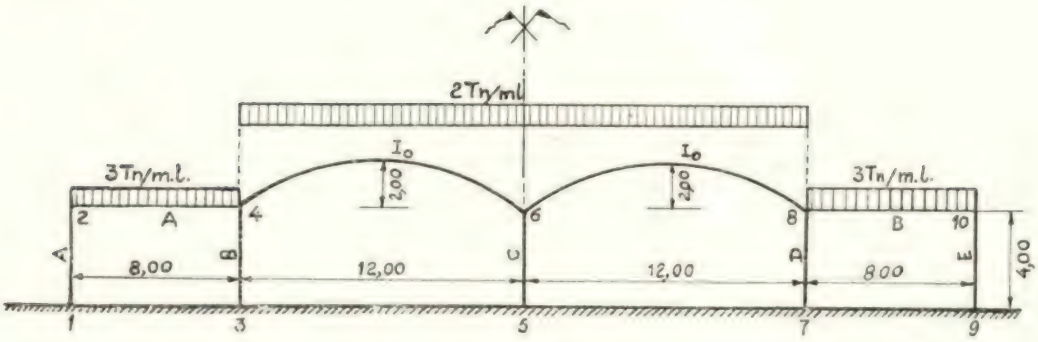


Fig. 24

Dada a simetria da solicitação e de estrutura, considerar-se-á apenas metade desta no estudo que se segue:

Elementos			Secção	I	E	l
Pila.	Viga.	Arc.	(m^2)	(m^4)	(Tn/m^2)	(m)
$\overline{1,2}$	—	—	$0,30 \times 0,30$	$6,7 \times 10^{-4}$	21×10^5	4,00
$\overline{3,4}$	—	—	$0,40 \times 0,40$	$21,3 \times 10^{-4}$	21×10^5	4,00
$\overline{5,6}$	—	—	$0,40 \times 0,40$	$21,3 \times 10^{-4}$	21×10^5	4,00
$\overline{7,8}$	—	—	$0,40 \times 0,40$	$21,3 \times 10^{-4}$	21×10^5	4,00
$\overline{9,10}$	—	—	$0,30 \times 0,30$	$6,7 \times 10^{-4}$	21×10^5	4,00
—	$\overline{2,4}$	—	$0,30 \times 0,50$	$31,2 \times 10^{-4}$	21×10^5	8,00
—	$\overline{8,10}$	—	$0,30 \times 0,50$	$31,2 \times 10^{-4}$	21×10^5	8,00
—	—	$\overline{4,6}$	$0,30 \times 0,40$	$16,0 \times 10^{-4}$	21×10^5	12,00
—	—	$\overline{6,8}$	$0,30 \times 0,40$	$16,0 \times 10^{-4}$	21×10^5	12,00

Condições de apoio

Encastramento perfeito de todos os apoios. Os apoios 3 e 7 sofrem assentamentos elásticos. Por assentamento elástico entende-se o assentamento que determina uma reacção que lhe é proporcional. Designando por:

Δz — o assentamento (m).

q — a carga por unidade de superfície que determina o assentimento anterior (Tn/m^2)

R — coeficiente de proporcionalidade (vulgarmente chamado coeficiente de balastro ou de assentamento) (Tn/m^3).

Teremos:

$$q = R \Delta z$$

Fazendo $\Delta z = 1m$ teremos:

$$q = R \text{ e admitiremos } R = 2.000 \ Tn/m^3$$

Coeficientes de influência

Elem. $\overline{A,B}$	E Tn/m²	I (m⁴)	l (m)	$\widehat{\lvert xx \rvert}$	$\widehat{\lvert yy \rvert}$	$\widehat{\lvert rx \rvert}$ / $\widehat{\lvert xr \rvert}$	$\widehat{\lvert ry \rvert}$ / $\widehat{\lvert yr \rvert}$	$\widehat{\lvert rr \rvert}$ m	$\widehat{\lvert rr \rvert}$ f
$\overline{1,2}$	21×10^5	$6,7 \times 10^{-4}$	4,00	263 8	—	527,6	—	1.407,0	703.5
$\overline{3\ 4}$	21×10^5	$21,3 \times 10^{-4}$	4 00	838,6	—	1.677.3	—	4.473.0	2.236,5
$\overline{2,4}$	21×10^5	$31,2 \times 10^{-4}$	8 00	—	153.5	—	614,2	3 276,0	1 638,0
$\widehat{4,6}$	21×10^5	$16,0 \times 10^{-4}$	12,00	797,8	23,6	1.063,8	141,8	2.553.3	851,1

Factores de operação

N.º	Tipo	1 N_2	2 N_4	3 X_A	4 Y_B	5 N_1	6 N_3	7 N_6	8 X_1	9 X_3	10 X_6	11 Y_A	12 Y_6
1	$r_2 = 1$	— 4.683,0	— 1.638,0	527,6	614,2	— 703.5	0	0	— 527,6	0	0	— 614,2	0
2	$r_4 = 1$	— 1 638,0	— 10.302,3	613.5	472.4	0	— 2.236.5	851,1	0	— 1.667 3	1.063,8	— 614,2	141,8
3	$U_A = 1$	527,6	613,5	— 1.900,2	0	527,6	1.677,3	1.063,8	263,8	838,6	797,8	0	0
4	$V_B = 1$	614,2	472,4	0	— 2.171,1	0	0	— 141,8	0	0	0	153.5	23,6

Verificação dos coeficientes de influência e factores de operação

(1) — : — 4.683,0 — 1.638,0 — 703 5 + 527,6 × 4 + 614,2 × 8 = 0

(2) — : — 1.638,0 — 10.302,3 — 2.236,5 + 851,1 + 1.677.3 × 4 + 472,4 × 8 + 141,8 × 20 = 0

(3) — : 527,6 + 613,5 + 527,6 + 1.677,3 + 1.063,8 + (263,8 + 838,6) × 4 = 0

(4) — : 614,2 + 472,4 — 141,8 — 153,5 × 8 — 23,6 × 12 = 0

Reacções nos extremos dos elementos considerados perfeitamente encastrados

$$\text{vigas } \overline{2,4} \text{ e } \overline{8,10} \begin{cases} V_e = V_d = \dfrac{ql}{2} = \dfrac{3 \times 8}{2} = 12{,}000 \text{ Tn} \\ M_e = -M_d = \dfrac{ql^2}{12} = \dfrac{3 \times 64}{12} = 16{,}000 \text{ Tnm} \end{cases}$$

$$\text{arcos } \widehat{4,6} \text{ e } \widehat{6,8} \begin{cases} V_e = V_d = 0{,}500 \text{ ql} = 0{,}5 \times 2 \times 12 = 12{,}000 \text{ Tn} \\ -H_e = -H_d = \dfrac{ql^2}{8f} = \dfrac{2 \times 144}{8 \times 2} = 18{,}000 \text{ Tn} \\ M_e = -M_d = 0 \end{cases}$$

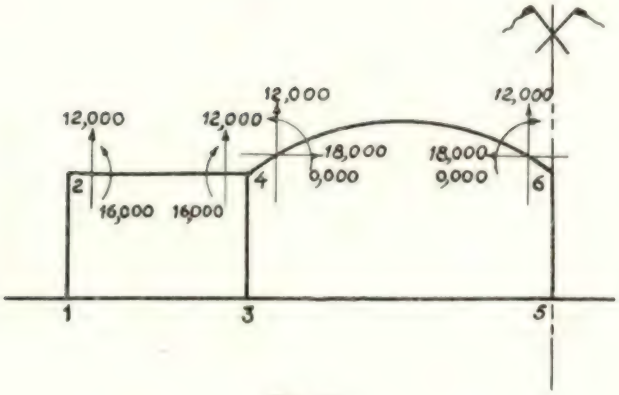


Fig. 25

Acções desequilibradas nos nós

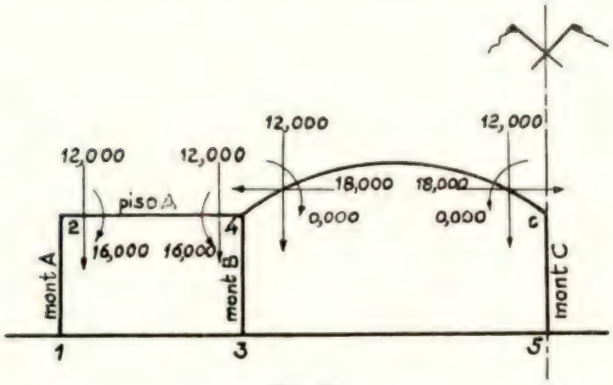


Fig. 26

Relaxação

Tipo	valor da relaxação	1 N_2	2 N_4	3 X_A	4 Y_B
		16,000	— 16,000	— 18 000	12,000
3	— 0 00947	— 4.996	— 5.810	17 995	0.000
		11,004	— 21,810	— 0,005	12,000
2	— 0 00211	3.456	21.738	— 1,294	— 0.997
		14 460	— 0,072	— 1,299	— 11,003
1	0 00308	— 14.424	— 5.045	1,625	1,892
		0.036	— 5.117	0.326	12,895
4	0 00593	3,642	2,801	0,000	— 12,875
		3 678	— 2,316	0,326	0,020
1	0.00078	— 3 653	— 1,278	0 411	0.479
		0,025	— 3.594	0,737	0,499
2	— 0 00034	0 557	3 503	— 0 208	— 0,161
		0 582	— 0,091	0,529	0,338
3	0 00027	0 142	0.166	— 0,513	0,000
		0,724	0.075	0,016	0,338
1	0,000154	— 0 721	— 0.252	0,081	0,094
		0,003	— 0,177	0.097	0 432
4	0 000180	0,110	0,085	0,000	— 0,391
		0,113	— 0,092	0 097	0,041
1	0 000024	— 0.112	— 0 039	0,013	0,015
		0,001	— 0,131	0,110	0,056
2	— 0,000012	0.020	0,124	— 0 007	— 0,006
		0,021	— 0,007	0,103	0,050
3	0.000054	0 028	0 033	— 0 103	0 000
		0,049	0,026	0,000	0,050
1	0 000010	— 0 047	— 0,016	0,005	0,006
		0,002	0 010	0,005	0,056
4	0,000007	0,004	0,003	0 000	— 0,015
		0,006	0,013	0 005	0,041
2	0 000001	— 0 002	— 0,010	0 001	0,000
		0,004	0,003	0,006	0,041
4	0,000018	0,011	0,008	0 000	— 0,039
		0,015	0,011	0,006	0,002
1	0,000003	— 0,014	— 0,004	0,002	0,002
		0,001	0,007	0,008	0,004

Determinação dos momentos e esforços nos extremos das peças

Elem. A,B	$\lvert \widehat{rx} \rvert_{AB}$ (1)	$\lvert \widehat{xx} \rvert_{AB}$ (2)	$(U_B - U_A)$ ou Δl (3)	$\lvert \widehat{ry} \rvert_{AB}$ (4)	$\lvert \widehat{yy} \rvert_{AB}$ (5)	$(V_B - V_A)$ (6)	$\lvert \widehat{xr} \rvert_{AB}$ (7)	$\lvert \widehat{yr} \rvert_{AB}$ (8)	${}_m\lvert \widehat{rr} \rvert_{AB}$ (9)	${}_f\lvert \widehat{rr} \rvert_{AB}$ (10)	r_A (11)	r_B (12)	(1.3) (13)	(2.3) (14)	(4.6) (15)	(5.6) (16)	(7.11) (17)	(7.12) (18)	(8.11) (19)	(8.12) (20)	(9.11) (21)	(9.12) (22)	(10.11) (23)	(10.12) (24)
$\overline{1\,2}$	527,6	263,8	−0,009146	—	—	0	527,6	—	1.407,0	703,5	0	0,004051	− 4,825	− 2,412	—	—	0	2,137	—	—	0	5,700	0	2,850
$\overline{3\,4}$	1.677,3	838,4	−0,009146	—	—	0	1.677,3	—	4.473,0	2.236,5	0	−0,002461	− 15,340	− 7,670	—	—	0	− 4,128	—	—	0	− 11,010	0	− 5,504
$\overline{2,4}$	—	—	—	614,2	153,5	0,006135	—	614,2	3.276,0	1.638,0	0 004051	−0,002461	—	—	3,768	0,942	—	—	2,488	− 1,511	13,271	− 8,062	6,635	− 4,031
$\widehat{4,6}$	1.063,8	797,8	−0,009146	141,8	23,6	−0,006135	1.063,8	141,8	2.553,3	851,1	− 0,002461	0	9,729	7,297	0,870	− 0,145	− 2.618	0	− 0,349	0	− 6,284	0	− 2,094	0

Elem.	Momentos						Esforços nos apoios			
	Pilares		Vigas		Arco		Pilares	Vigas	Arco	
A,B	M_A − 13 + 21 + 24	M_B − 13 + 22 + 23	M_A − 15 + 21 + 24	M_B − 15 + 22 + 23	M_A − 13 + 15 + 21 − 24	M_B 13 − 15 + 22 − 23	X_A − 14 + 17 + 18	Y_A − 16 + 19 + 20	X_A − 14 + 17 − 18	Y_A − 16 + 19 + 20
$\overline{1,2}$	7,675	10,525	—	—	—	—	4,549	—	—	—
$\overline{3,4}$	9,836	4,330	—	—	—	—	3,542	—	—	—
$\overline{2,4}$	—	—	5,472	− 5,195	—	—	—	0,035	—	—
$\widehat{4,6}$	—	—	—	—	− 15,143	12,693	—	—	− 9,915	− 0,204

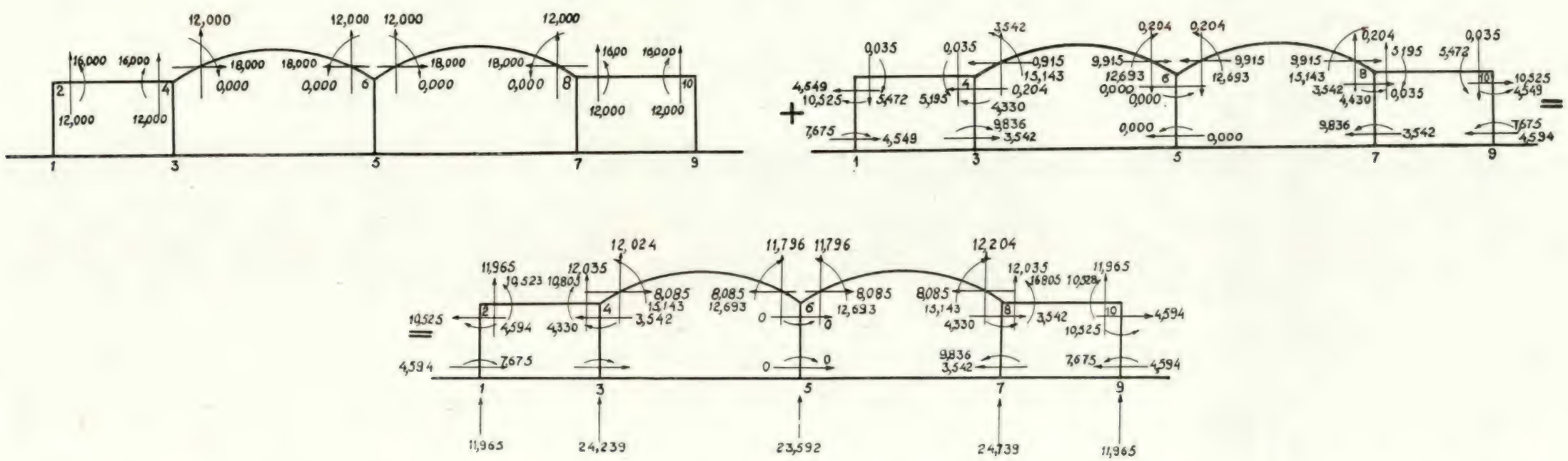
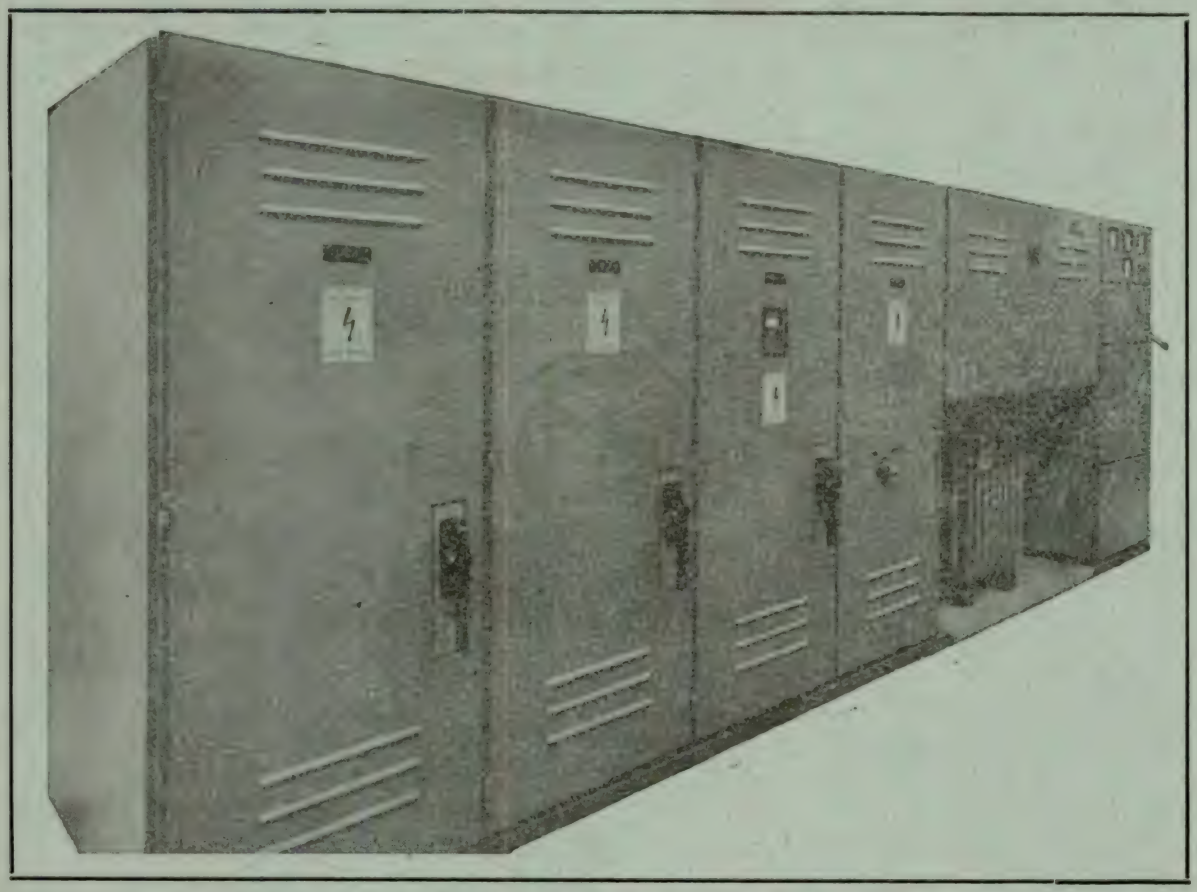


Fig. 27

POSTOS DE TRANSFORMAÇÃO BLINDADOS

PARA INTERIOR E EXTERIOR

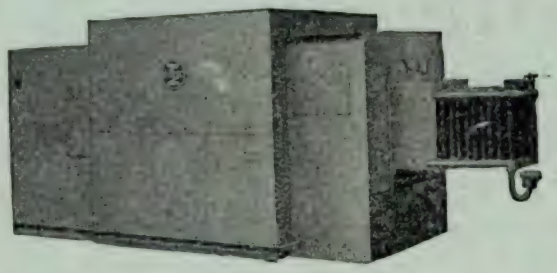


Posto de transformação de 250 KVA, 6,6 KV, para interior, fornecido para os Serviços Autónomos de Luz e Água de Luanda (LAL)

CONSTRUÍDOS POR:

JAYME DA COSTA, LDA

LISBOA — PORTO — LUANDA



A **humidade** é a causa de sérios problemas de ordem técnica e de incalculáveis prejuízos.

Estes inconvenientes podem ser totalmente eliminados com a utilização dos **Exsicadores "BIRLEC"** fabricados por

BIRLEC

LIMITED

BIRMINGHAM — Inglaterra

Representantes para Portugal:

Ahlers, Lindley, Limitada

Rua Ferregial de Baixo, 33-2.º
LISBOA
Telef. 21321/4

Palácio do Atlântico, 408
Praça D. João I
PORTO — Telef. 31414/5

Verificação da relaxação

Tipo	Valor da relaxação	1 N_2	2 N_4	3 X_A	4 Y_B
		16,000	— 16,000	— 18,000	12,000
1	0,004051	— 18,971	— 6,634	— 2,137	2,488
2	— 0,002461	4,031	25,355	— 1,508	— 1,160
3	— 0,009146	— 4,826	— 5,611	17,379	0,000
4	0,006135	3,767	2,894	0,000	— 13,320
		0,001	0,007	0,008	0,004

Valores totais das rotações e translacções

$$r_2 = 0{,}004051 \text{ rad.}$$
$$r_4 = 0{,}002461 \text{ rad.}$$
$$U_A = 0{,}009146 \text{ m}$$
$$V_B = 0{,}006135 \text{ m}$$

Verificação das reacções de apoio

Dos valores obtidos na fig. 27 resulta

$$\text{Equilíbrio de forças} \begin{cases} 4{,}594 - 4{,}594 + 3{,}542 - 3{,}542 = 0 \\ 48 + 48 - 11{,}965 - 22{,}239 - 23{,}592 - 22{,}239 - 11{,}965 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Equilíbrio de momentos} \begin{cases} -(24 + 36) - (48 \times 20) - (24 \times 4) + 11{,}965 \times 40 + 24{,}239 \times \\ \times 32 + 23{,}592 \times 20 + 24{,}239 \times 8 = 0 \end{cases}$$

Deverá ainda proceder-se à verificação do equilíbrio de forças e de momentos nos nós.

C. D. U. 621.311.5/91

Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional

— Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.)

NOTA: *As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 91,6 % dos totais do País.*

SETEMBRO

I — Breve nota mensal

Do ponto de vista hidrológico o mês de Setembro foi um pouco inferior ao normal.

II — Elementos gerais (GWh)

a) Mensais

	1956	1957	Variação %
Produção hidráulica (P_h) . . .	149,6	145,1	— 3
Produção térmica (P_t)	0,0	0,0	0
Produção total (P_T)	149,6	145,1	— 3
Cons. electroquímico (C_{eq}) (1)	30,4	11,1	— 63
Cons. permanentes (C_p) . . (1)	112,0	126,0	+ 13
Consumo total (C_T) . . . . (1)	142,4	137,1	— 4

b) Acumulados desde 1 de Janeiro de 1957

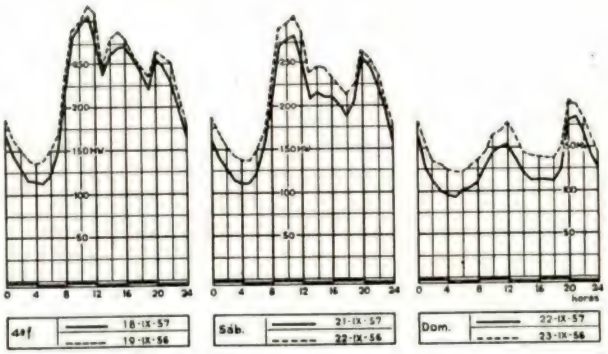
	1956	1957	Variação %
Produção hidráulica (P_h) . . .	1446,8	1458,5	+ 1
Produção térmica (P_t)	3,6	51,7	-
Produção total (P_T)	1450,4	1510,2	+ 4
Cons. electroquímico (C_{eq}) . (1)	350,1	266,6	— 24
Cons. permanentes (C_p) . . . (1)	1048,7	1167,9	+ 11
Consumo total (C_T) . . . . . (1)	1398,8	1434,5	+ 3

Nota:

(1) Vidé nota referente ao mês de Janeiro de 1957.

III — Diagramas de carga dos dias característicos

	4.ª feira:	
	19-9-956	18 9-957
Produção hidráulica (P_h) — MWh	5518	5268
Produção térmica (P_t) — MWh . .	0	0
Produção total (P_T) — MWh . . .	5518	5268
Utilização da ponta (U) — horas	17,2	17,0
Factor de carga (α)	0,72	0,71
Relação $\frac{\text{Pot. mín.}}{\text{Pot. máx.}}$ (r)	0,42	0,36



IV — Energia armazenada nas principais albufeiras no fim do mês.

Albufeira	Energia armazenada	
	GWh	% (1)
Venda Nova	29,7	23,2
Salamonde	19,3	69,9
Caniçada	8,6	25,9
Guilhofrei	2,2	26,5
Lagoa Comprida	8,5	29,0
Santa Luzia	22,4	36,4
Cabril :	64,1	18,9
Castelo do Bode	77,5	47,5
Pracana	1,5	12,1
Póvoa	4,6 (2)	26,9
Total	238,6	28,8

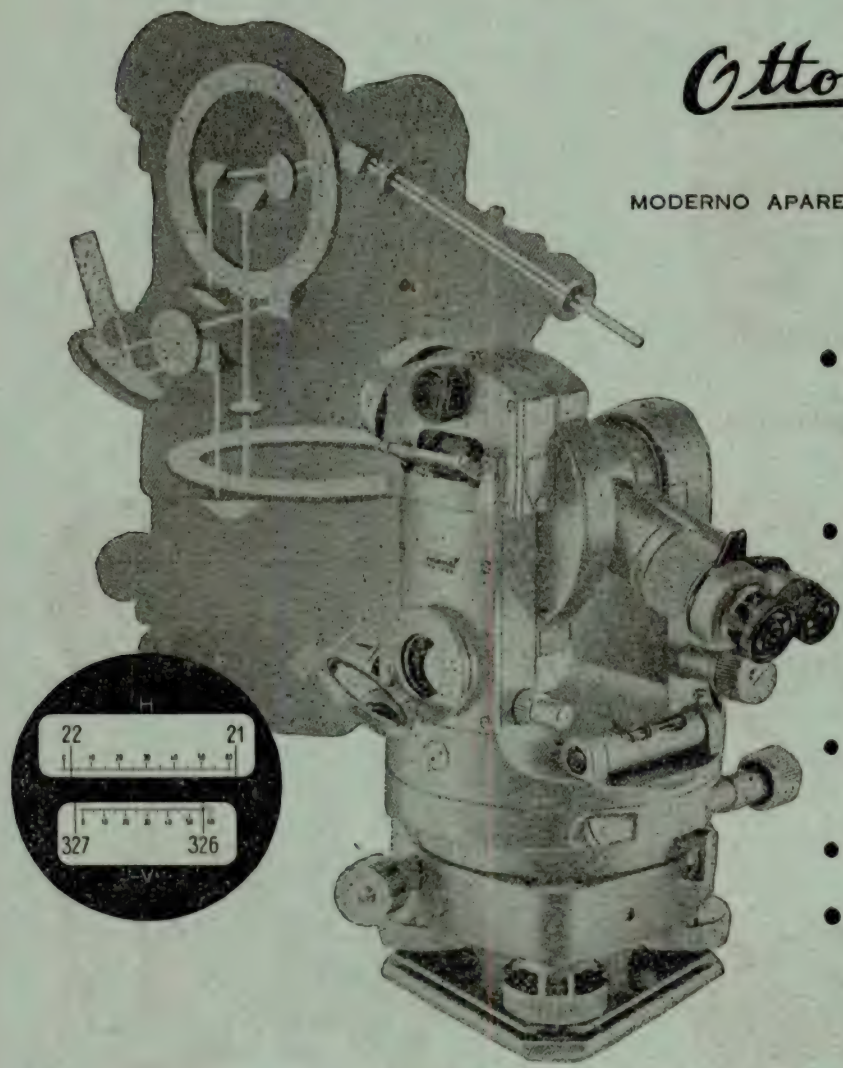
Notas:

(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras, definido pela relação

$$\frac{\text{Energia armazenada}}{\text{Máx. energia armazenável}} \times 100\ \%$$

(2) Inclui 1,6 GWh armazenados no açude do Poio.

TEODOLITO TAQUEOMÉTRICO FTI



Otto-Fennel

MODERNO APARELHO DISPONDO DE:

- Observação simultânea dos dois limbos pelo microscópio colocado ao lado da ocular da objectiva
- Leitura por sistema directo de 1c e décimos por estimativa
- Leitura do nível vertical por coincidência
- Prumo óptico
- Grande luminosidade

Características ópticas e mecânicas

Telescópio analáctico com lente de focagem interna, retículo medidor de distância, telescópio reversível com o extremo da objectiva.

Constante de adição	zero
Constante de multiplicação	100
Comprimento do telescópio	190 mm
Abertura da objectiva	36 mm
Ampliação	28 x
Distância mínima de mira	1 m
Nível redondo	6' a 8'
Nível de reversão	30"
Nível de horizontalidade paralelo ao eixo de inclinação	40"

Nível junto ao círculo vertical legível por ajustamento da coincidência 40". Passo circunferencial sobre círculos de vidro 360° ou 400 g, de 1° ou de 1 g.

Diâmetro do círculo horizontal 90 mm, do círculo vertical 70 mm

Leitura directa horizontal	1'	1 c
Leitura por avaliação	1'	1 c
Leitura directa vertical	0,1' = 6"	0,2 c = 20cc
Leitura por avaliação	0,2' = 12"	0,25c = 25cc

Pesos: Instrumento 4,7 kg, Tripé com pés extensíveis 6,0 kg, Caixa metálica 4,0 kg

REPRESENTANTES

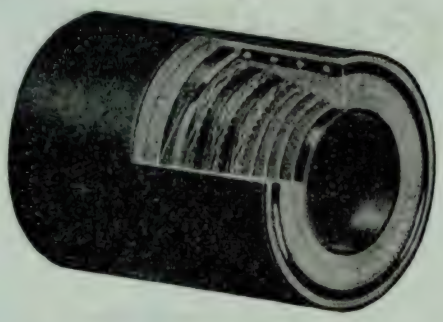
PAPELARIA FERNANDES

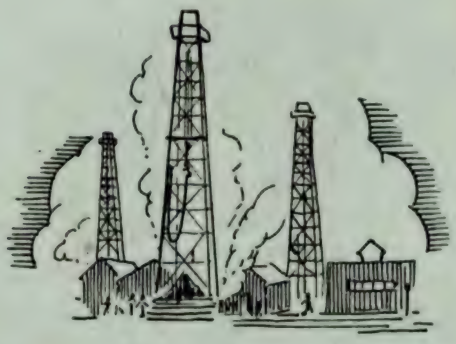
L. DO RATO, 13—TELEF. 66 11 16—7 LINHAS—R. DO OURO, 145—TELEF. 28361

LISBOA

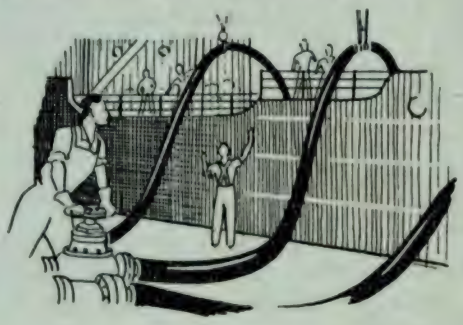
Nas Indústrias do Petróleo

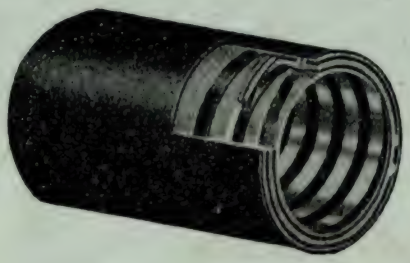
Desde a extracção



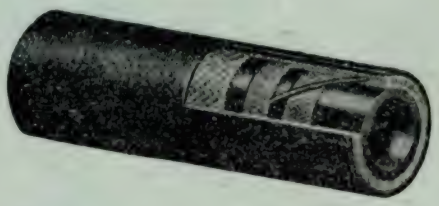


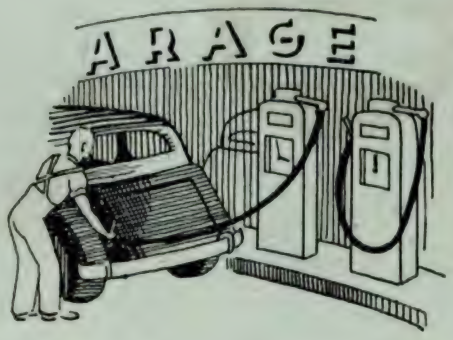
passando pelo transporte





até à distribuição





O nome

GOODYEAR

é conhecido em todo o mundo

Distribuidores exclusivos: **CANELAS & FIGUEIREDO, L.DA**

R. dos Fanqueiros, 46 — LISBOA

Telef. { 2 5058 / 2 4502 / 2 1729

Teleg. **CANELASCO**

C. D. U. 550.831

PROSPECÇÃO GRAVIMÉTRICA

O Problema da Interpretação

PELO ENG.º DE MINAS (I. S. T.) JOSÉ QUINTINO ROGADO
Bolseiro do I. A. C.

(Continuação)

CAPÍTULO II

A indeterminação da configuração potenciante

Temo-nos até aqui referido apenas ao campo gravítico, que pode pôr o prospector em contacto com as ocorrências geológicas, dando delas uma imagem, manifestação física da sua massa. Ocorre agora perguntar se será possível, partindo do conhecimento desse campo, estruturar unìvocamente as configurações geológicas por ele responsáveis.

Infelizmente a resposta é, como se sabe, negativa. Não é possível estabelecer tal correspondência unívoca. Quere dizer, a interpretação dos dados gravíticos em termos de massas potenciantes esbarra com uma determinação intrínseca, o que tem dado lugar ao desenvolvimento do que se pode chamar «processos de interpretação condicionada», os mais elaborados dos quais partem precisamente da análise daquela indeterminação. Torna-se por isso conveniente que anteriormente ao estudo da interpretação se faça em termos precisos a definição da indeterminação.

A análise de Green à função potencial permite, como apontamos, considerar o potencial gravítico U (P), na superfície da Terra, devido a qualquer distribuição densitária subterrânea, como sendo o potencial provocado por uma distribuição de simples camada de densidade

$$\sigma = \frac{1}{2\pi k} g(Q) = \frac{1}{2\pi k}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_Q$$

existente sobre um plano horizontal arbitrário S′ de ponto corrente Q, situado entre a superfície da Terra e a distribuição potenciante real. Isto é, como se escreveu em (41-I):

$$U(P) = \frac{1}{2\pi}\int_{S'} \frac{1}{r} g(Q)\, dS' \qquad (41\text{-I})$$

Denominaremos qualquer distribuição subterrânea arbitrária de simples camada, satisfazendo à condição de ser

$$\sigma = \frac{1}{2\pi k}\frac{\partial U}{\partial z},$$

de «camada equivalente».

Pois bem, como, uma vez determinada a função potencial, tudo fica conhecido no campo dela derivado, segue-se que se removermos a distribuição potenciante real e a substituirmos por uma camada equivalente nada se alterará naquele.

Ao plano S′, suporte da camada equivalente, apenas se exigem as condições de ser paralelo à superfície da Terra e de estar situado entre aquela e a distribuição potenciante real. Trata-se, efectivamente, de condições muito fracas, que se traduzem na existência de uma infinidade contínua (1) de camadas equivalentes.

Ora é precisamente nisto que reside a indeterminação da configuração potenciante.

Do ponto de vista da gravidade essa indeterminação traduz-se pela seguinte equação que resulta de (41-I) por simples derivação segundo a vertical, feita no ponto P

$$g(P) = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_P = \frac{1}{2\pi}\int_{S'} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)_P g(Q)\, dS' \qquad (1\text{-II})$$

e que é uma equação integral pois g (Q) não é conhecido.

A integração de (1-II) teria a vantagem de relacionar a densidade da camada equivalente com os valores da gravidade observados, permitindo construir aquela, o que, além de tornar bem patente a indeterminação, forneceria um pro-

(1) Entenda-se com a potência de um conjunto contínuo. Como se sabe, a análise de Green parte até de condições mais gerais.

cesso de interpretação, desde que se conheça a profundidade da estrutura potenciante real.

Assim, sendo U o potencial, será Lap U = O, cuja solução se pode pôr na forma [25]:

$$U = \sum_m \sum_n A_{mn} \begin{matrix} \text{sen } m\,x \text{ sen } n\,y \\ \cos m\,x \cos n\,y \end{matrix} e^{-\sqrt{m^2+n^2}\,.\,z} \qquad (2\text{-II})$$

onde z é a cota em relação a um plano de referência, por exemplo, a camada equivalente. Nesta, como já vimos, será:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{z=0} = 2\pi k \sigma (x,y) \qquad (3\text{-II})$$

Pois bem, se admitirmos que a densidade distribuída sobre a camada equivalente é exprimível por uma função que pertença à classe das funções com desenvolvimento em série Fourier poderá escrever-se:

$$\sigma (x, y) = \sum_m \sum_n B_{mn} \begin{matrix} \text{sen } mx \text{ sen } ny \\ \cos mx \cos ny \end{matrix} \qquad (4\text{-II})$$

e, portanto, por (3-II), será:

$$-\sqrt{m^2 + n^2}\, A_{mm} = 2\pi k B_{mm}$$

Mas g (x, y, z) é também harmónica e portanto a solução de Lap g = 0, no plano da superfície da Terra suposto à cota + h, poderá por-se na forma:

$$g (x, y, +h) = \sum\sum C_{mn} \begin{matrix} \text{sen } mx \text{ sen } ny \\ \cos mx \text{ con } ny \end{matrix} \qquad (5\text{-II})$$

Mas, sendo

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{z=+h} = g (x, y, h)$$

será, por (2-II) e (5-II):

$$-\sqrt{m^2 + n^2}\, A_{mn}\, e^{-\sqrt{m^2+n^2}\,.\,h} = C_{mn} \qquad (6\text{-II})$$

ou

$$B_{mn} = \frac{1}{2\pi k} C_{mn} \,.\, e^{\sqrt{m^2+n^2}\,.\,h} \qquad (7\text{-II})$$

que é a relação procurada e mostra ser a densidade da camada equivalente função da profundidade h a que se encontra, o que é mais uma maneira de traduzir a indeterminação que vimos referindo. Convém notar que em (7-II) se supoz que a densidade da camada equivalente pertencia a uma determinada classe de funções e, portanto, não engloba todos os casos possíveis, embora a classe daquelas funções seja muito extensa [26].

Pode, contudo, argumentar-se que camadas de densidade variável não são geològicamente presumíveis e, portanto, não só não há interesse prático em referi-las, como também o facto de poderem substituir qualquer massa potenciante não representa embaraços para quem interpretar os dados gravimétricos, visto que as não considerará [27].

Ora, notemos que a densidade superficial variável pode traduzir ondulações de uma estrutura, pois se puzermos $\sigma (x, y) = \gamma \Delta t$, da onde γ é contraste densitário e Δt a espessura camada e, se admitirmos γ é constante, a espessura será variável $-\Delta t$ (x, y). Poderemos pois obter estruturas equivalentes como as da Fig. 6. Isto é, estruturas com o mesmo campo que a configuração real e já presumíveis sob o aspecto geológico.

Além disso, sempre que a camada equivalente apresentar duas zonas contíguas com densidades de sinal contrário, poderemos transformá-la numa estrutura com um único contraste densitário como o da Fig. 7-a. Basta considerar que uma tal estrutura, se for extensa e limitada por um plano horizantal não produzirá anomalia gravítica local. Esta, se existir, resultará apenas da ondulação da superfície que determina o contraste densitário (V. Apêndice) e, nesse caso, o campo anómalo será igual ao produzido por uma camada equivalente com uma área de densidade positiva contígua a outra de densidade negativa, visto que, quanto à anomalia que produz, aquela estrutura se pode assemelhar a uma estrutura como a da Fig. 7-b [25], onde a altura z acima da camada equivalente se pode *aproximadamente* calcular [27], desde que a estrutura seja suficientemente profunda, pondo

$$z \simeq \frac{g\,(Q)}{2\pi k \,.\, \gamma},$$

onde γ é o contraste densitário admitido.

E, mesmo que a camada equivalente apresente só uma zona de densidade positiva, ainda é pos-

sível substituí-la por uma estrutura equivalente com um único contraste densitário, por um processo análogo ao anterior (Fig. 8).

Vê-se assim que a noção de camada equivalente, extraída da análise de Green, embora traduza a indeterminação da configuração potenciante, permite construir hipóteses sobre a mesma de grande valor para técnicas interpretativas [25], o que, se constitui vantagem evidente, é demonstração perfeita da importância da análise da indeterminação naquelas técnicas.

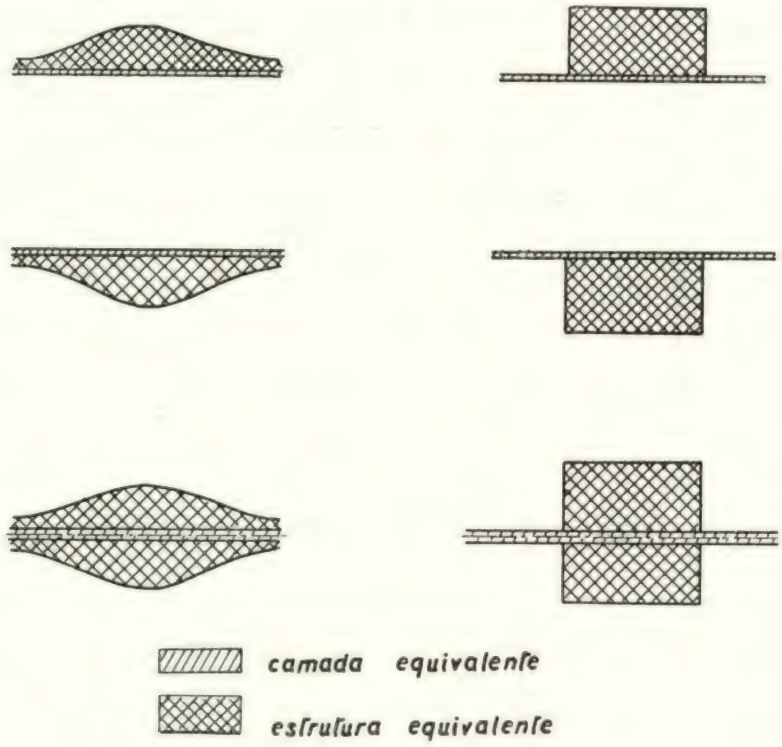


Fig. 6

CAPÍTULO III

Anomalia regional e anomalia local

Feita a correcção de Bouguer e a correcção isostática, se necessário, a anomalia de Bouguer traduz, como já referimos, as anomalias na distribuição densitária subterrânea, isto é, as ocorrências geológicas cujas densidades se não coadunam com as hipóteses feitas nas correcções.

Estas ocorrências geológicas podem ser profundas e extensas ou, pelo contrário, ocorrerem junto à superfície da Terra e terem dimensões sificadas de regionais e em oposição, no segundo caso, chamadas locais.

O prospector poderá pretender conhecer qualquer desses dois grupos de ocorrências e conforme aquele sobre que incíde o seu interesse assim estará realizando prospecção regional ou local, respectivamente. Compreende-se que, por exemplo, ao realizar prospecção local, haja que separar a anomalia devida às ocorrências regionais, que não interessam, das outras provocadas pelas configurações locais que se procuram. E inversamente, na prospecção regional.

Surgem pois estes dois conceitos difíceis de definir, aos quais já fizemos referência no Capítulo I, e que traduzem uma necessidade prática ineludível — *a anomalia local e a anomalia regional.*

Este aspecto da apreciação das anomalias, posto desde os primeiros tempos da prospecção geofísica, consiste em definir duas componentes do campo e atribuir-lhes causas geológicas de tipo diferente, problema que, se atendermos ao que ficou dito sobre a indeterminação da massa potenciante, é insolúvel, no caso geral.

É claro que o conhecimento geológico regional ou local da área a interpretar é de incomparável reduzidas. No primeiro caso, costumam ser clas-

valor, porque pode conduzir a situarmo-nos apenas na consideração de alguns casos particulares mais prováveis. Mas, infelizmente, os dados geológicos iniciais são cada vez menos frequentes ou mais escassos, particularmente os dados geológicos locais, e por isso a prospecção geofísica tem, as mais das vezes, de lançar mão de métodos próprios que lhe permitam delinear o que é regional e o que é local, nas anomalias observadas.

Na essência todos esses métodos se resumem em realizar uma *atenuação* da anomalia observada, entendendo-se por tal a operação que suprime certos aspectos da anomalia, fazendo sobressair outros.

Assim, a atenuação pode ser conduzida de tal modo que os valores altos do gradiante horizontal da anomalia, segundo uma ou mais direcções, sejam suprimidos, tendo escolhido aquelas direcções à custa de qualquer conhecimento geológico estrutural ou por simples verificação de determidada lei que ressalte do conjunto dos dados geofísicos de que se dispõe, nos quais certas configurações da anomalia terão então uma «permanência» que permitirá deduzir essa lei, enquanto outras serão excepcionais. Far-se-á. portanto, com atenuação deste tipo, a ablação das anomalias locais e ficar-se-á de posse da anomalia regional, à qual se associou a ideia de ser provocada por configurações geológicas profundas ou extensas, o que está, na verdade, de acordo com o conceito habitual de regional.

Noutro tipo de atenuação, procura-se suprimir as anomalias locais impondo uma representação analítica simples (um polinómio inteiro de baixo grau, quase sempre) à anomalia regional e determinando os parâmetros daquela representação por processos de interpolação, a um dos quais

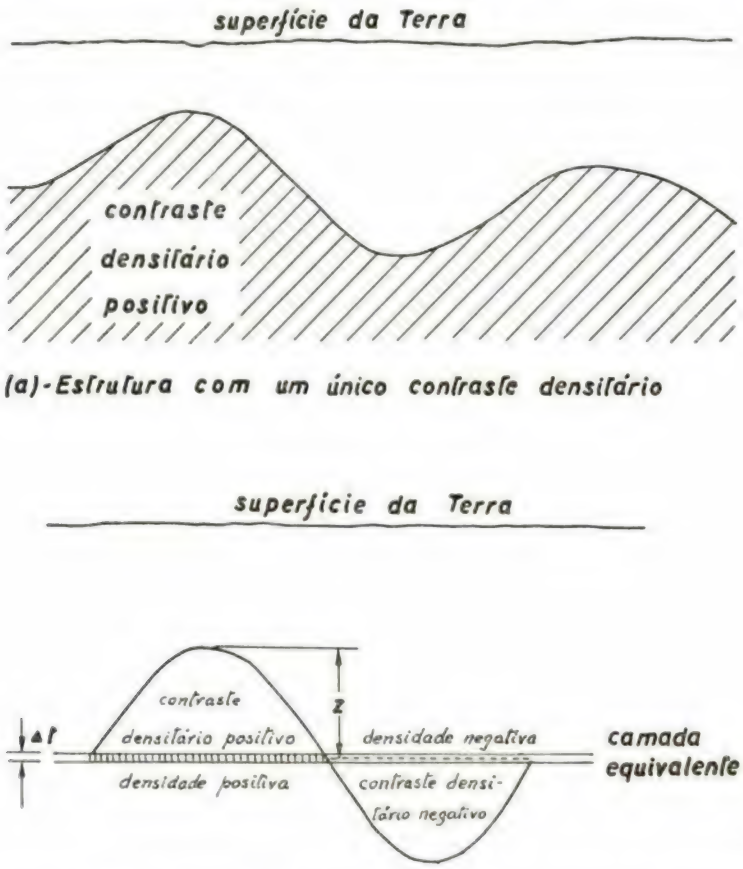


Fig. 7

já nos referimos no Capítulo I. Como se vê, não se trata de forma de atenuação muito diferente da anteriormente referida, porquanto escolher um polinómio de baixo grau para representar a anomalia regional é impor determinados valores aos gradiantes horizontais daquela.

Ainda um terceiro tipo de atenuação, que na cronologia não é o último, procura-se suprimir a anomalia local, considerando-a análoga a uma dispersão sujeita a qualquer lei de probabilidade.

Evidentemente, o princípio que se adopta, para construir a anomalia regional caracterizará o método a empregar e os resultados que se alcançarão. E não é demais frizar a importância daquele na interpretação dos dados geofísicos. Por isso, esta escolha da forma como se irá definir as anomalias regional e local deve ser criteriosamente pesada e encarada sempre num conjunto tão extenso quanto possível de dados geofísicos, geológicos, mineiros, etc.

Em certos casos a separação do que é regional na anomalia é imediato, como, por exemplo, no caso já citado, da existência de um primeiro gradiante horizontal da anomalia mais ou menos uniforme ou variando lentamente ao longo de uma área extensa, e pessoas diferentes obterão os mesmos resultados, ao realizarem a atenuação. Mas, se a estrutura geológica regional é complexa ou não é bem distinta das ocorrências locais, o resultado da atenuação será sèriamente afectado pelo método escolhido e, em consequência, por elementos pessoais de quem fez a escolha.

Da verificação destes factos resultou o aparecimento de numerosos métodos para separar a anomalia local da anomalia regional. Podemos reuni-los em dois grandes grupos — *métodos gráficos e métodos analíticos*. Quase todos eles levam à construção de dois campos, o campo regional e o campo residual, diferença daquele para o campo original, e que é considerado o campo local.

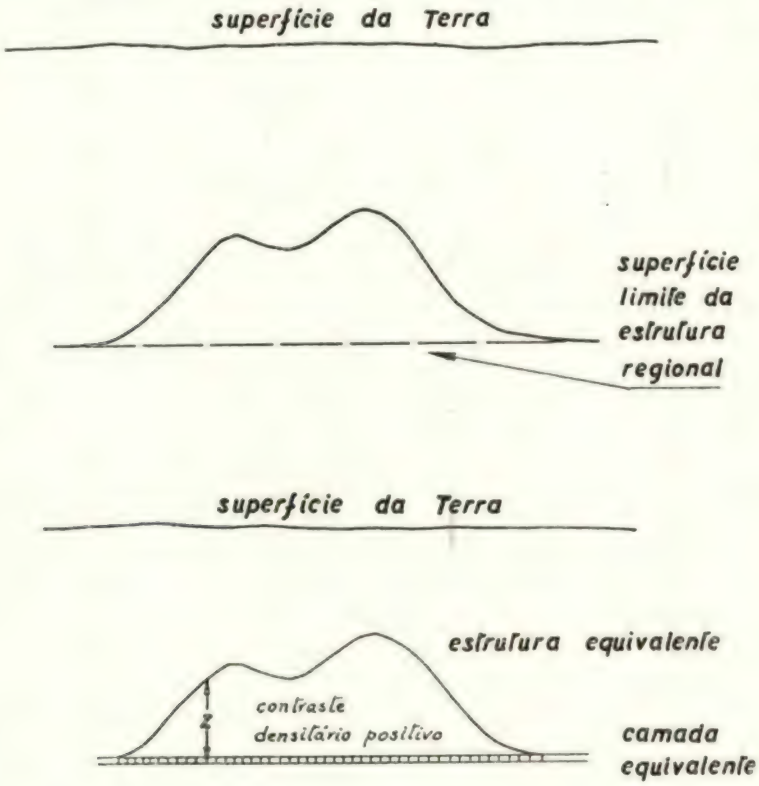


Fig. 8

1 — Métodos gráficos de atenuação

Estes métodos apresentam duas modalidades que conduzem sensìvelmente aos mesmos resultados, quando forem bem aplicados e os valores originais de que partirem forem em abundância. A primeira modalidade, a que chamaremos «Método de Atenuação dos Contornos», é a forma

mais directa de realizar a atenuação e consiste em obter o campo regional por regularização dos contornos da carta do campo original, entendendo-se por tal a substituição dos contornos mais ou menos curvilíneos por outros rectilíneos ou de pequena curvatura, o que corresponde, evidentemente, a admitir que a superfície analítica que representa o campo regional é bem interpolada por um polinómio de baixo grau.

Este método é muito empregado em razão da sua simplicidade, e é suficientemente seguro, quando ocorrem configuracões regionais nítidas ou o andamento dos contornos residuais for diferente do dos contornos regionais.

A outra modalidade que denominaremos «Método de Atenuação dos Perfis» é já mais evoluída, mas também mais trabalhosa, e resume-se, na sua forma mais simples, em construir perfis do campo original, paralelos e equidistantes, e cuja direcção comum ou é mais ou menos perpendicular aos contornos do mapa original ou paralela a qualquer direcção geológica previlegiada, perfis esses que são depois regularizados suprimindo as zonas de curvatura acentuada e procurando manter, tanto quanto possível, o mesmo gradiante horizontal ao longo de cada um deles. Finalmente, à custa dos novos perfis assim obtidos, constroi-se o campo regional e, por diferença para o original, o campo residual.

Numa forma mais complexa, este método realiza-se segundo duas direcções, ortogonais ou não, de modo que se obtém, em cada ponto do cruzamento de dois perfis, dois valores que devem ser muito próximos para se tomar a sua média como o valor do campo regional nesse ponto. Se assim não for, há que repetir em ambos os perfis a atenuação até os dois valores obtidos em cada nó diferirem pouco. É uma modalidade aconselhável quando o campo original se apresenta complexo.

Todos estes processos gráficos, para serem seguros, têm de ser efectuados por pessoa mais ou menos conhecedora do significado dos conceitos em que se estruturam. Apesar disso, ou talvez por isso mesmo, os resultados a que conduzem podem ser muito influenciados por factores pessoais.

2 — Métodos analíticos de atenuação

Com a intenção de automatizar a atenuação e assim eliminar o principal defeito dos métodos gráficos, estruturaram-se vários métodos analíticos que se podem classificar em «Métodos de Atenuação pela Média» e «Métodos de Atenuação por Interpolação», embora todos eles sejam baseados em operações de interpolação [32]. Qualquer deles, por não exigirem especialistas para a sua execução, embaratecem as operações de atenuação e são, por essa circunstância, bastante usados em trabalhos de rotina.

2.1 — *Métodos de atenuação pela média*

O mais simples método de atenuação pela média consiste em calcular as médias aritméticas dos valores da anomalia original que caem dentro de uma área, quase sempre quadrada, que se centra sucessivamente nos pontos, onde se pretende conhecer o campo regional, e considerar em cada um desses pontos este campo como sendo igual às médias obtidas.

É costume calcular por interpolação o campo original em pontos regularmente localizados na área prospectada, antes de se efectuar esta operação.

Como é evidente, o valor do campo regional é muito afectado pela área escolhida para o cálculo da média. Se esta é extensa, o regional tenderá para valor baixo e o campo residual consequentemente aproximar-se-á do campo original. Se é pequena, o campo regional aproximar-se-á do original e o campo residual tenderá para zero.

Outra forma simplista de atenuação analítica consiste em considerar sobre a área prospectada uma rede de malha regular, definida por duas direcções ortogonais, calcular por interpolação o campo original nos seus nós e construir, ao longo de cada fiada da rede, as médias aritméticas de um certo número de valores do campo original simètricamente dispostos para um e outro lado de cada nó.

A cada nó da rede ficarão, pois, correspondendo dois valores médios, um por cada direcção da rede. Toma-se por valor do campo regional a média aritmética desses dois valores.

Como é fácil de mostrar, este modo de proceder pode considerar-se baseado na hipótese de o campo regional ser interpolado por um polinómio inteiro de qualquer grau, e não apenas do primeiro, como tentou fazê-lo Agocs [32].

Além disso, porque se considera para o cál-

culo do valor regional num ponto os valores do campo original apenas segundo duas direcções, este método pode conduzir a resultados erróneos.

Quer este último método, quer o anterior, podem considerar-se processos empíricos de realizar a atenuação. Serão, quando muito, aconselháveis em casos favoráveis. Consegue-se com eles automatizar a atenuação mas obtêm-se resultados nìtidamente mais grosseiros que com os métodos gráficos.

2.1.1 — *Método de atenuação com grade*

Sem dúvida, o processo de atenuação que tem sido mais usado, quando o volume de dados a estudar é já elevado, é aquele que dominaremos «Método de atenuação com grade».

Com este método pode obter-se directamente, quer o campo regional, quer o campo residual. Interessa-nos especialmente abordar o segundo caso.

A forma mais simples de construir o campo residual em determinado ponto, utilizando aquele método, consiste em calcular a média dos valores do campo original situados sobre uma circunferência centrada nesse ponto e deduzi-la ao valor do campo no centro. Covém evidentemente que os pontos tomados na circunferência, para construir a média, sejam equidistantes e no maior número possível. Por isso, se os pontos observados se não distribuem regularmente, há que fazer essa distribuição por interpolação.

Nas aplicações usam-se para o cálculo das médias 4, 6, 8 ou mais pontos. Para facilitar a escolha dos pontos desenha-se em papel transparente (1) e na escala da carta da anomalia de Bouguer, uma grade, onde estão marcados o centro e os pontos onde devem ser feitas as leituras. Daí o nome deste método.

O campo residual construído com grade de uma só circunferência depende consideràvelmente do diâmetro daquela e do número de pontos tomados para o cálculo da média.

Por essa razão se procurou modificar o método, utilizando, em vez de uma, várias circunferências, construindo a média ponderada das médias aritméticas obtidas em cada uma delas e deduzindo-a ao valor central para se obter o campo residual.

(1) Ver Capítulo I, Fig. 5.

O modo de estabelecer os pesos dessas médias é arbitrário, embora se possa procurar dar-lhe uma estruturação analítica, que elucidará sobre o significado do sistema de pesos empregado.

Antes de mais, note-se que, usando uma única circunferência, o campo residual Δg é definido do seguinte modo:

$$\Delta g = g(0) - g(r) \qquad \text{(1-III)}$$

onde $g(0)$ é o campo original na estação e $g(r)$ a média na circunferência de raio r. Portanto, como vimos, será:

$$g(r) = a_0 + a_2 r^2 + a_4 r^4 + \ldots$$

Supondo, como já fizemos no Capítulo I, que $g(r)$ numa pequena vizinhança é bem aproximado por

$$G(r) = a_0 + a_2 r^2$$

teremos:

$$g = g(0) - a_0 - a_2 r^2$$

Ora:

$$a_0 = g(0)$$

donde:

$$g = -a_2 r^2 \qquad \text{(2-III)}$$

Mas, já vimos (Capítulo I) que, se a_2 tiver sido calculado numa vizinhança da origem evanescente, será:

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right)_{r=0} = -4\, a_2$$

E por isso pode escrever-se:

$$\Delta g = +\frac{r^2}{4}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right)_{r=0}$$

Quere dizer, o valor residual é, a menos um factor, o valor da segunda derivada, qualquer que seja o raio r onde se calculou a média, desde que o valor de a_2 escolhido esteja correcto numa vizinhança da origem arbitràriamente pequena. É claro que, para a_2 ser válido numa vizinhança evanescente e numa vizinhança finita, há que admitir que a aproximação $G(r)$ de $g(r)$ não é uma aproximação, mas sim o valor correcto, isto é, $G(r) \equiv g(r)$.

Portanto, introduzindo a hipótese de $g(r)$ ser um polinómio do segundo grau, o campo residual construído do modo referido é, a menos um factor, o campo do segundo gradiante ver-

tical da anomalia. Mas para que g(r) seja um polimónio do segundo grau, terá que ser a anomalia um polimónio do segundo ou do terceiro graus em r. É esta, pois, a condição para a identificação do segundo gradiante vertical com o campo residual, qualquer que seja o raio r de circunferência onde se calcula a média.

Quando aquela condição não for satisfeita, o campo residual não coincide com o campo do segundo gradiante. Chama-se-lhe por isso *campo derivado* [33].

No caso geral será, portanto:

$$g(r) = a_0 + a_2 r^2 + a_4 r^4 + \ldots$$

e se adoptarmos, para definição do campo residual, a expressão (1-III), importa calcular sempre g(r).

Já vimos no Capítulo I, como calcular gráfica ou analìticamente o coeficiente a_2. O cálculo de $a_4, \ldots$ far-se-ia de forma análoga; contudo, não se costuma fazer.

Quere dizer, habitualmente calcula-se o campo residual, usando o processo adoptado para o cálculo do segundo gradiante vertical. Este modo de proceder estrutura-se no seguinte [33]:

A anomalia satisfaz a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = -\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)$$

E, se representarmos os valores do campo, nos pontos tomados na circunferência de raio r, por b_i e o valor central por C, será, tomando quatro pontos situados em dois eixos hortogonais:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \simeq \frac{1}{r}\left[\frac{(b_1 - C)}{r} - \frac{(C - b_3)}{r}\right] = \frac{(b_1 + b_3 - 2C)}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \simeq \frac{1}{r}\left[\frac{(b_2 - C)}{r} - \frac{(C - b_4)}{r}\right] = \frac{(b_2 + b_4 - 2C)}{r^2}$$

e portanto

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \simeq \frac{4}{r^2} \cdot \left[C - \frac{(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)}{4}\right]$$

Deslocando os eixos n vezes, teremos:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \simeq \frac{4}{r^2} \cdot$$

$$\cdot \left[C - \frac{(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + \ldots + (b_{4n-3} + b_{4n-2} + b_{4n-1} + b_{4n})}{4n}\right]$$

e se n for suficientemente elevado, o parêntesis recto do segundo membro representará a verdadeira média sobre a circunferência de raio r, isto é g(r) e, portanto, o campo residual, no caso geral, construído à custa daquela média, será também igual (a menos um factor) ao campo do segundo gradiante vertical *se o raio* r *for suficientemente pequeno.*

Pode, por isso, substituir-se sempre o campo residual pelo campo da segunda derivada, escolhendo r arbitràriamente pequeno, e fazer, portanto, o cálculo daquele, à custa de a_2. Isto é, mesmo no caso geral, subsistirá (2-III) e continuar-se-á a chamar ao campo residual, assim obtido, campo derivado, quando, por razões económicas, não houver interesse em escolher r suficientemente pequeno.

Ora, como o cálculo de a_2, como vimos, se faz considerando vários valores de r (isto é, várias circunferências concêntricas) e interpolando, para se obter o melhor valor, resulta do que se disse, a mesma técnica para o cálculo do campo derivado e simultâneamente um sistema de pesos para as diversas médias, que vai buscar a sua razão de ser às semelhanças entre o campo derivado e o campo do segundo gradiante vertical.

Existem, pois, para expressões de a_2, além das já indicadas no Capítulo I, várias outras baseadas na utilização de três ou mais circunferências e que podem ser vistas em [21, 24 e 31].

Em conclusão, a atenuação com grade estrutura-se na circunstância de que o campo residual construído (campo derivado) se aproxima do campo do segundo gradiante vertical, o que vale o mesmo que dizer que se considera o campo regional como um polinómio de segundo grau, porquanto a aplicação do operador

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

o suprime. É claro que aquele operador, no caso geral, é aplicado de forma aproximada, visto não haver conveniência em usar no cálculo de a_2 circunferências de raio suficientemente pequeno e portanto a sua *função de atenuação* [33] é dependente daquele raio.

Esta definição de anomalia regional, implícita naqueles métodos de atenuação, é plenamente justificada se atendermos a que se chamou anomalia regional àquela que é provocada por configurações geológicas extensas ou profundas, e

TEODOLITOS

CONSTRUÇÃO DR. H. WILD

DK 2
DKM 2
DKM 2-U
DKM 2-T

SÃO DE LONGE O QUE DE MELHOR SE FABRICA EM TODO O MUNDO!

Precisão inexcedível
Manejo facílimo
Construção robusta
A óptica mais luminosa

Aumento da luneta 30×, abertura da objectiva	45 mm
Focagem mínima a	1,4 m
Focagem máxima para leitura dos mm na mira	230 m
Idem para leitura dos cm	500 m
Constante de multiplicação 100, e de adição	0
Peso do equipamento com tripé extensível, sómente . . .	10,9 Kg

KERN & CIE. S. A. AARAU — Suíça

REPRESENTANTES

EMÍLIO DE AZEVEDO CAMPOS & CA. LDA.

RUA DE SANTO ANTÓNIO, 137-145 — PORTO — TEL. 20254/5
RUA ANTERO DE QUENTAL, 17-1.º — LISBOA — TEL. 53366

NOTA — Os teodolitos «KERN» não são aparelhos repetidores, mas sim teodolitos de círculo-duplo, oferecendo portanto maior precisão e um trabalho muito mais simples e mais rápido.

Exportação de fábricas e instalações industriais

Varsóvia — Polónia
Caixa Postal 112
Telegramas: CEKOP — VARSÓVIA

EXPORTA

Unidades metalúrgicas completas
Instalações para enriquecimento e aglutinação (aglomeração) de minérios
Altos fornos
Instalações de fábricas de aço e laminagem

Os limites dos nossos fornecimentos podem incluir o material e a execução das seguintes tarefas:

— estudos económicos e técnicos
— sondagens hidrológicas e geológicas
— elaboração da documentação técnica completa, necessária à construção dos edifícios, montagem e funcionamento
— fornecimentos incluindo a montagem da maquinaria e arranque da laboração
— instrução do pessoal destinado à exploração.

constitui o ponto de partida para os métodos de atenuação por interpoloção com polinómios inteiros.

2.2 — *Métodos de atenuação por interpolação com polimónios*

Estes métodos recorrem à interpolação pelos mínimos quadrados e definem o campo regional como sendo um campo bem interpolado por polinómio inteiro de baixo grau. Em oposição, admitem que as anomalias locais só podem ser bem interpoladas por polinómios do grau elevado.

Contudo, para a estruturação de um e de outro campo falta, nestes métodos, precisar, em cada caso concreto, quais os graus dos dois polinómios interpoladores.

Ùltimamente [34] surgiu uma tentativa para realizar essa definição, que referiremos à frente.

Em conjunto, este modo de atenuação tem cada vez maior emprego em resultado do uso sempre crescente das máquinas calculadoras. Trata-se, efectivamente, a nosso ver, da maneira mais criteriosa de realizar a separação dos dois campos, sem deixar de ter a elasticidade necessária, para se poder adaptar a casos muito diversos e a hipóteses muito diferentes. Contudo, só se aconselha, quando o volume dos trabalhos justificar a estandardização que o seu emprego implica.

Na sua forma inicial [35], este método de atenuação punha o problema nestes termos:

É conhecido o campo original g (x, y) num conjunto discreto de pontos dispostos nos nós de uma rede de malha constante, que representaremos por S, situada no plano Oxy coincidente com a superfície da Terra.

Pretende-se interpolá-lo por um polinómio inteiro em x e y de grau n, fixado, e que será a representação analítica do campo regional. O campo ou anomalia local é, em cada ponto, o desvio entre a interpolação e o valor do campo original.

Isto é, sendo R (x, y) o polimónio interpolador, representação analítica do campo regional, será:

$$g(x, y) = R(x, y) + \triangle g(x, y)$$

onde, como sempre, $\triangle g(x, y)$ é a anomalia local.

É pois

$$R(x, y) = \sum_{K, l = 0}^{n, n-K} C_{Kl}\, x^K y^l \ .$$

Ponha-se

$$\triangle^2 (C_{Kl}) = S\,[g(x, y) - R(x, y)]^2$$

onde representamos por S a soma efectuada com todos os valores da rede S.

As condições de mínimo, inerentes ao método, que permitrrão determinar C_{kl} serão dadas pelo sistema das equações normais

$$\sum_{i, j = 0}^{n, n-K} C_{ij}\, S\, x^{i+k}\, y^{j+l} = S\, g(x, y)\, x^k y^l$$

$$\begin{pmatrix} k = 0, 1 \ldots\ldots n \\ l = 0, 1 \ldots\ldots n-k \end{pmatrix}$$

A solução deste sistema pode simplificar-se e para tanto dê-se-lhe a forma matricial:

$$\left\{S\, s^{i+k}\, y^{j+l}\right\} . \left\{C_{ij}\right\} = \left\{S\, g(x, y)\, x^k y^l\right\}$$

cuja solução é, evidentemente:

$$\left\{C_{ij}\right\} = \left\{S\, x^{i+k}\, y^{j+l}\right\}^{-1} . \left\{S\, g(x, y)\, x^k y^l\right\}$$

Ora, se atendermos a que os valores de g (x, y) são conhecidos nos nós de uma rede rectangular de malha constante, como a da Fig. 9, os elementos da matriz

$$\left\{S\, x^{i+k}\, y^{j+l}\right\}$$

podem escrever-se:

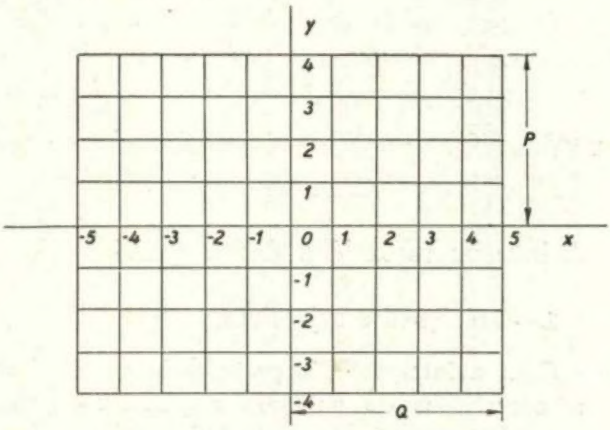


Fig. 9

$$S\, x^{i+k}\, y^{j+l} = \sum_{\xi=-Q}^{Q} \sum_{\eta=-P}^{P} \xi^{i+k}\, \eta^{j+l} =$$

$$= \left\{ \sum_{\xi=-Q}^{Q} \xi^{i+k} \right\} . \left\{ \sum_{\eta=-P}^{P} \eta^{j+l} \right\},$$

donde se deduz que os elementos da matriz só não são nulos, quando $(i + k)$ e $(j + l)$ forem ambos pares. Conclusão esta que é geral. Quere dizer, utilizando sempre a mesma malha e polinómios do mesmo grau, para interpolar o campo regional, o cálculo do coeficiente C_k é muito simplificado, embora mesmo assim possa ser muito trabalhoso.

Como se viu, houve que arbitrar o grau do polinómio interpolador do campo regional, o que pode fazer-se por estudo da carta da anomalia de Bouguer, mas deixa larga margem ao arbítrio de quem o escolhe.

Recentemente, Oldham e Sutherland [34], para fazerem o estudo de um extenso campo gravítico regional, no Sudoeste da província de Ontario, introduzindo a hipótese de que a anomalia local se comportava como uma variável aleatória do valor médio nulo com variância constante para todas as observações e utilizando o método dos mínimos quadrados, estabeleceram um critério para determinar o grau do polinómio interpolador do campo regional.

Do ponto de vista teórico o processo é cativante, mas conduz a cálculos muito extensos, de modo que a sua utilização fica condicionada ao emprego de calculadores electrónicos. Há contudo que frizar que a extensão da área onde se aplicar este método deve ter certa influência na legitimidade das hipóteses introduzidas sobre o campo local. Quere dizer, pensamos que devem utilizar-se, nos cálculos, valores do campo original colhidos em uma zona tão extensa, que, de facto se possa considerar nela o campo local de valor, médio nulo e variância constante (1).

CAPÍTULO IV

A interpretação dos dados gravimétricos

1 — Definições e objectivos

Com a interpretação pretende-se caracterizar as ocorrências do sub-solo responsáveis pelas anomalias gravíticas, quanto à localização, densidade, profundidade, forma e dimensões.

Já referimos (Capítulo II) que existe uma indeterminação intrínseca nos problemas da interpretação e, por isso mesmo, no caso geral a caracterização de todos aqueles elementos não é possível. Mas, muitas vezes, tenta realizar-se a interpretação porque, além do conhecimento das anomalias gravíticas, se dispõe de certos dados fornecidos pela Geologia e outros métodos geofísicos, pelas sondagens ou por trabalhos mineiros, dados que limitam as configurações possíveis a alguns casos pouco numerosos. Este conhecimento estranho aos dados gravíticos, pode consistir em:

1. Informação sobre a profundidade provável da configuração potenciante;
2. Conhecimento da sua densidade;
3. Informação sobre a forma provável da mesma.

Não sendo conhecidas, nem a profundidade, nem a densidade, nem a forma, a interpretação limita-se a localizar em planta anomalias densitárias e, quando muito a dar-lhe o sinal do contraste. E não se julgue que, mesmo em casos como este, a informação geofísica seja necessàriamente de somenos importância. Antes pelo contrário, na grande maioria dos trabalhos de prospecção do petróleo e dos minérios a simples localização de uma anomalia densitária com o respectivo sinal do contraste, numa região, onde a Geologia nada podia afirmar, é de importância enorme e pode ter valor económico considerável, porquanto se traduz na definição de uma área restrita, onde haverá que sondar com elevada probabilidade de encontrar algo (1). Pode mesmo afirmar-se que a finalidade da prospecção geofísica é localizar, em planta, as áreas de anomalias densitárias [28].

Contudo, se condições geológicas ou outras justificarem um pormenorizada e rigorosa prospecção geofísica por gravimetria e se se dispuzer de dados estranhos, nomeadamente a profundide e o contraste densitário, poderá haver interesse em realizar a interpretação, tentando traduzir as anomalias por prováveis configurações do sub-solo.

Para tanto, exístem diversas técnicas de interpretação.

(1 Em sentido análogo, embora usando outros algoritmos, tinha já estabelecido Grant [36], em 1954, um método estatístico para determinar o campo regional.

(1) Na prospecção do petróleo, os furos dirigidos pela geofísica, em 25 % dos casos são produtivos [28].

2 — Técnicas de interpretação

Uma vez que os elementos de campo sejam simultâneamente pormenorizados e precisos, pode tentar-se a interpretação seguindo dois métodos.

Num deles admite-se que a configuração potenciante tem determinada forma, certo contraste densitário e se encontra a dada profundidade e calcula-se a anomalia correspondente, que se compara, em seguida, com aquela que foi observada. Se a concordância é boa, poder-se-á afirmar que a configuração hipotética é, tanto mais provável, quanto maior for a segurança das hipóteses que levaram à sua construção. Se a concordância não é boa, há que alterar alguns ou todos os elementos de configuração potenciante hipotética, calcular novamente o seu campo e tornar a fazer a comparação com a anomalia observada. E assim sucessivamente.

Este método denomina-se de *interpretação indirecta*.

No outro método, chamado de *interpretação directa*, admite-se que a configuração potenciante tem determinado densidade ou pertence a certo tipo (anticlinal, massa, filão, falha, camada horizontal ou inclinada, etc.) e que jaz a certa profundidade e, por intermédio de técnicas analíticas especiais, determina-se a sua forma e dimensões.

Em qualquer dos dois casos a interpretação indicará a configuração potenciante mais provável, em face dos dados gravíticos ou doutra natureza de que se dispõe.

2.1 — *Interpretação indirecta*

Pondo de parte o método de interpretação indirecta que consiste em supor a configuração potenciante com formas geométricas simples (cilindro horizontal infinito, cilindro vertical, esfera, estrato horizontal semi-infinito, etc.) os campos gravíticos das quais se podem deduzir por via analítica, mas cuja semelhança com as ocorrências reais é, quase sempre, muito precária, pode dizer-se que o método mais empregado é o que utiliza ábacos, para calcular o campo devido à configuração hipotética.

Podem construir-se ábacos próprios para as chamadas configurações planas ou bidimensionais, isto é, estruturas em que uma dimensão excede consideràvelmente as outras, como as dobras de charneira muito longa, as falhas, os filões de grande extensão, as massas muito alongadas, etc., e que, portanto, provocam anomalias de características constantes segundo uma direcção.

Nestes casos, desenha-se uma secção hipotética normal à maior dimensão da configuração e sobrepõe-se-lhe um ábaco traçado em papel transparente, fazendo coincidir a origem do mesmo com os pontos onde se pretende conhecer a anomalia.

Estes ábacos são construídos, dividindo uma área, normalmente semi-circular, em sectores de dimensões tais, que a componente vertical do campo que cada um deles produz no centro do semi-círculo (origem do ábaco) é a mesma. Por consequência, fazendo a contagem do número de sectores que caem dentro da secção da configuração hipotética, obtém-se a gravidade no ponto coincidente com a origem do ábaco, a menos um factor, que depende da escala em que se desenhou aquela secção.

Quando a configuração potenciante não pode ser considerada bidimensional, há que realizar certas correcções ou utilizar ábacos para tal preparados [5], ou então dividi-la por planos horizontais, em «estratos» de altura constante, nos quais se supõe distribuída uma densidade superficial igual ao produto do contraste densitário admitido pela altura dos estratos e utilizar ábacos apropriados, que fornecem a gravidade provocada por qualquer dos estratos. Há aqui, contudo, que variar a escala da representação de cada estrato, porquanto um parâmetro que intervém no desenho do ábaco é a profundidade, facto que pode tornar o método trabalhoso.

Com as configurações bidimensionais, usam-se também, por vezes, integradores mecânicos para determinação do campo.

Além destes processos geométricos e mecânicos, que referimos por alto, parece-nos de particular interesse um outro baseado, em uma analogia óptica, cujo estudo tivemos ocasião de continuar durante a elaboração deste trabalho e ao qual fazemos referência mais detalhada no Capítulo VI.

Com efeito, pode-se por:

$$g\,(P) = k \int_V \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r}\right)_p \gamma \, dv$$

ou

$$g\,(P) = k \int_V \frac{\cos\,(z, r)}{r^2} \gamma \, dv$$

Dividindo portanto, a configuração potenciante hipotética em estratos horizontais de altura Δt fìsicamente pequena, aos quais atribuímos a densidade de volume γ, cada estrato pode ser assemelhado a uma distribuição de simples camada com $\sigma = \gamma \Delta t$ e teremos para o estrato i:

$$g_i (P) = k \int_{S_i} \gamma \, \Delta t \, . \, \frac{\cos (z, r)}{r^2} \, d S_i \qquad (1\text{-IV})$$

Mas o integral de (1-IV) representa, a menos um factor, a intensidade de iluminação em P provacada pela superfície S_i, onde existe distribuída determinada intensidade luminosa (ver Apêndice).

Esta analogia foi, parece-nos, pela primeira vez apontada por Tsuboi e Fuchida em 1938, que, tendo colocado uma chapa fotográfica a certa distância e paralelamente a uma superfície luminosa em forma de L obtiveram na chapa manchas que se assemelhavam notàvelmente aos contornos da anomalia gravítica calculada para estrato com aquela mesma forma.

Quere dizer, se, em vez de utilizar uma chapa fotográfica se medir a intensidade de iluminação provocada num determinado plano por uma superfície plana luminosa paralela àquele e com a forma de qualquer dos estratos em que se dividiu a configuração hipotética, obter-se-á, a menos uma constante, a distribuição da anomalia gravítica produzida pelo estrado considerado. Repetindo a operação para os estratos em que se dividiu a configuração hipotética, e somando em cada ponto os valores obtidos, construiremos de modo muito simples e também rigoroso a anomalia gravítica daquela.

Este processo não envolve outra aproximação que não seja a resultante da divisão da massa potenciante em estratos de altura fìsicamente pequena, é susceptível de grande rigor, desde que se disponha de dispositivo sensível para medir intensidades de iluminação, como é o caso de um bom fotómetro, e pode utilizar-se com qualquer tipo de configuração potenciante.

É além disso fàcilmente adaptável a um braço mecânico que se desloque sobre uma carta traçada em qualquer escala, onde estejam marcados os pontos nos quais se deseja conhecer o valor da anomalia, de modo que a leitura das intensidades luminosas, para os diferentes extractos se faça sempre nos mesmos pontos.

Em resumo, trata-se de um processo laboratorial para o estudo do campo gravítico, utilizando um modelo óptico barato, onde a relação de semelhança é muito simples, e em que o trabalho dispendido para a estruturação do campo é bastante reduzido. Contamos, por isso, poder desenvolvê-lo e aperfeiçoá-lo.

2.2 — *Interpretação directa*

Como referimos, com a interpretação directa pretende-se, partindo do conhecimento da anomalia, estabelecer a configuração potenciante anómala. Vimos também que só é de tentar esta interpretação, quando se dispõe de dados gravimétricos abundantes e precisos e ainda, se se puderem estabelecer certas hipóteses sobre a profundidade, o contraste densitário e o tipo de configuração que se procura.

A interpretação directa realiza-se por meio do «prolongamento descendente» (downward continuation).

2.2.1 — *O prolongamento descendente*

O prolongamento descendente consiste em calcular o campo tão próximo quanto possível da massa potenciante, uma vez conhecida a anomalia na superfície da Terra.

A razão de ser deste modo de proceder baseia-se nas seguintes considerações:

Vimos, no Capítulo II, que sobre a camada equivalente, os valores da densidade superficial estão relacionados com a gravidade por:

$$\sigma = \frac{g (Q)}{2 \pi k}$$

onde g (Q) é o campo, na camada equivalente, e k a constante de gravitação.

Mostramos também que aquela camada podia ser substituída por uma estrutura equivalente com um único contraste desintário, desde que, se fixasse este em certo valor γ, e que o relevo dessa estrutura, referido ao plano da camada equivalente seria então:

$$\Delta z = \frac{g (Q)}{2 \pi k \gamma}$$

Isto é, a menos um factor contante, o campo na vizinhança da estrutura equivalente, é igual